Certains aspects du programme de Langlands géométrique

I. Introduction générale. Dans ce rapport je presente mes travaux dans la direction du programme de Langlands géométrique entrepris depuis 1997.

La réformulation géométrique du programme de Langlands classique a été proposé par Drinfeld, Beilinson et Laumon au debut des annees 80, de nombreux travaux ont été consacre a ce programme depuis, en particulier par Drinfeld, Beilinson, Frenkel, Gaitsgory, Mircovic, Vilonen et beaucoup d'autre. Je commencerai par presenter le cadre et les conjectures principales de ce programme dans le cas nonramifié.

Soit k un corps de base (qu'on supposera soit fini soit algébriquement clôs). Soit X une courbe lisse projective géométriquement connexe sur k, $F = k(X)$. On note $\mathbb{A}$ l'anneau des adèles de F, $\mathcal{O} \subset \mathbb{A}$ les entiers. Pour $x \in X$ notons F_x le complété de F en x, $\mathcal{O}_x \subset F_x$ l'anneau des entiers.

On se donne un groupe réductif connexe déployé $\mathbb{G}$ sur k, $\mathbb{T} \subset \mathbb{G}$ un tore maximal. On fixe un premier ℓ inversible dans k. Soit $\check{\mathbb{G}}$ le dual de Langlands de $\mathbb{G}$ sur $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$. Le point de depart est la version catégorique de l'isomorphisme de Satake. Notons $\mathrm{Gr}_{\mathbb{G}} = \mathbb{G}(F_x)/\mathbb{G}(\mathcal{O}_x)$ la grassmanienne affine de $\mathbb{G}$. Soit $\mathrm{Sph}_{\mathbb{G}}$ la catégorie des $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceaux pervers $\mathbb{G}(\mathcal{O}_x)$-equivariant sur $\mathrm{Gr}_{\mathbb{G}}$.

Theorem 1. *(Drinfeld, Ginzburg, Lusztig, Mircovic, Vilonen).* $\mathrm{Sph}_{\mathbb{G}}$ *est muni d'une structure de catégorie tensorielle rigide et on a une equivalence canonique des catégories tensorielle* $\mathrm{Sph}_{\mathbb{G}} \widetilde{\to} \mathrm{Rep}(\check{\mathbb{G}})$*, où* $\mathrm{Rep}(\check{\mathbb{G}})$ *est catégorie des* $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$*-representation (de dimension finie) de* $\check{\mathbb{G}}$*.*

Notons $\mathcal{A}_V \in \mathrm{Sph}_G$ l'object correspondant a $V \in \mathrm{Rep}(\check{G})$.

Soit G un schéma en groupe sur X qui est locallement pour la topologie étale de X est isomorphe a $X \times \mathbb{G}$. Soit $\mathrm{Out}(\mathbb{G})$ le groupe d'automorphismes exterieurs de $\mathbb{G}$, notons Σ l'image de l'homomorphisme canonique $\pi_1(X, x) \to \mathrm{Out}(\mathbb{G})$ associé a G, ici x est un point géométrique de X. Soit $\tilde{X} \to X$ le revêtement étale Galosien correspondant du groupe de Galois Σ. On suppose G quasi-deployé, donc on peut trivialiser $G \mid_{\tilde{X}} \widetilde{\to} \mathbb{G}$ de sorte que l'action obtenue de Σ sur $\mathbb{G}$ preserve un épinglage.

Soit Bun_G le champ des G-torseurs sur X, notons $\mathrm{D}(\mathrm{Bun}_G)$ la catégorie dérivée des $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceaux pour la topologie étale sur Bun_G. Alors, pour $\mathcal{A} \in \mathrm{Sph}_{\mathbb{G}}$ on a un foncteur de Hecke $\mathrm{H}(\mathcal{A}, \cdot) : \mathrm{D}(\mathrm{Bun}_G) \to \mathrm{D}(\tilde{X} \times \mathrm{Bun}_G)$.

Un homomorphisme $\rho : \pi_1(X, x) \to G^L = \check{\mathbb{G}} \ltimes \pi_1(X, x)$ peut-être vu comme un $\check{\mathbb{G}}$-système local E sur $\tilde{X}$ muni d'une action tordue de Σ.

Definition 1. Un object non nul $K \in \mathrm{D}(\mathrm{Bun}_G)$ est un *faisceau automorphe correspondant a* ρ s'il est muni pour tout $V \in \mathrm{Rep}(\check{\mathbb{G}})$ d'isomorphisme (on ignore les twists de Tate)

$$\mathrm{H}(\mathcal{A}_V, K) \widetilde{\to} V_E \boxtimes K[1]$$

Ces isomorphismes doivent être compatibles avec la structure tensorielle sur $\mathrm{Rep}(\check{\mathbb{G}})$ et l'action de Σ.

Conjecture 1. *A tout ρ comme si-dessus on peut associer un faisceau automorphe K_ρ sur* Bun_G.

Les résultats les plus marquant déjà obtenu sont la démonstration de cette conjecture pour $G = \mathrm{GL}_n$ et ρ irréductible, le cas $n = 2$ est fait par Drinfeld et pour n arbitraire c'est un théorème due a Frenkel, Gaitsgory et Vilonen. Il y a aussi certains conjectures dans la diréction fonctorielle (moins developée) suivante: comment K_ρ depend de ρ quand ρ varie?

Deuxième aspect est la fonctorialité. Si G et H sont des schémas en groupe sur X comme si-dessus, étant donné un L-homomorphisme des L-groupes de Langlands $H^L \to G^L$, soit $\check{\mathbb{H}} \to \check{\mathbb{G}}$ l'homomorphisme induit.

Conjecture 2. *Il existe une famille des foncteurs* ${}_SF : \mathrm{D}(S \times \mathrm{Bun}_H) \to \mathrm{D}(S \times \mathrm{Bun}_G)$ *indexée par des schémas S avec les propriétés suivantes. Pour un choix de revêtement $\tilde{X} \to X$ étale Galoisien de groupe de Galois Σ tel que H et G devient les formes interièure sur $\tilde{X}$, le foncteur F commute avec les operateurs de Hecke, a savoir pour tout $V \in$* $\mathrm{Rep}(\check{\mathbb{G}})$ *on a un isomorphisme des foncteurs de* $\mathrm{D}(S \times \mathrm{Bun}_H)$ *dans* $\mathrm{D}(S \times \tilde{X} \times \mathrm{Bun}_G)$

$$\mathrm{H}_G(\mathcal{A}_V) \circ {}_SF \,\widetilde{\to}\, {}_{\tilde{X}\times S}F \circ \mathrm{H}_H(\mathcal{A}_{\mathrm{Res}^{\check{\mathbb{G}}}_{\check{\mathbb{H}}} V})$$

qui sont compatible avec l'action de Σ et les structures tensorielles sur $\mathrm{Rep}(\check{\mathbb{G}})$ *et* $\mathrm{Rep}(\check{\mathbb{H}})$.

II. Description générale de mes travaux

Mes résultats sur le programme de Langlands géométrique peuvent etre regroupé en plusiers parties.

1) Méthode de Rankin-Selberg pour GL_n local et globale ([1] et [2]).

2) Modeles de Whittaker et de Bessel géométriques pour $\mathbb{GSp}_4$ ([4] et [6]).

3) Programme de Langlands geometrique pour le groupe métaplectique ([5]):

   a) calcul du dual de Langlands du groupe métaplectique;

   b) Analogue géométrique de la fonction théta de A. Weil.

4) Correspondance de Howe géométrique. Fonctorialité de Langlands géométrique pour $H^L \to G^L$, où $H = \pi_* \mathbb{G}_m$, $G = \mathrm{GL}_2$ et $\pi : \tilde{X} \to X$ est un revêtement étale de degré 2.

1) Dans la partie 1) on donne une interpretation géométrique de la méthode de Rankin-Selberg classique pour calculer le produit scalair de deux formes automorphes cuspidales partout non-ramifiées sur GL_n. (Le cas $n = 2$ a été considéré dans ma thèse de doctorat). Supposons k algébriquement clôs.

Soit E est un GL_n-système local irréductible sur X et Aut_E le $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceau pervers sur $\mathrm{Bun}_{\mathrm{GL}_n}$ qui est vecteur propre des opérateurs de Hecke pour E (construit par Gaitsgory). Le groupe

$\mathbb{G}_m$ agit sur $\mathrm{Bun}_{\mathrm{GL}_n}$ par 2-automorphismes de l'identité, notons $\underline{\mathrm{Bun}}_{\mathrm{GL}_n}$ le quotient de $\mathrm{Bun}_{\mathrm{GL}_n}$ par cette action, c'est un 1-champ algébrique sur k. Le faisceau Aut_E se descend a un faisceau pervers $\underline{\mathrm{Aut}}_E$ sur $\underline{\mathrm{Bun}}_{\mathrm{GL}_n}$.

Le système local E admet une déformation universelle (R, E_R) sur $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$. La construction de $\underline{\mathrm{Aut}}_E$ via les modeles de Whittaker passe aux déformations, donc on dispose d'un R-faisceau pervers $\underline{\mathrm{Aut}}_{E_R}$ sur $\underline{\mathrm{Bun}}_{\mathrm{GL}_n}$. Soit E_i les deux relèvement de E_R par rapport aux projections $\mathrm{Spec}(R \hat{\otimes}_{\bar{\mathbb{Q}}_\ell} R) \to \mathrm{Spec}\, R$.

Theorem 2. *On a un isomorphisme canonique*

$$\mathrm{R}\Gamma_c(\underline{\mathrm{Bun}}_{\mathrm{GL}_n}, \underline{\mathrm{Aut}}_{E_1} \otimes \underline{\mathrm{Aut}}_{E_2^*}) \widetilde{\to} R,$$

où la structure d'un $R \hat{\otimes}_{\bar{\mathbb{Q}}_\ell} R$-modules sur R est donnée par le morphisme diagonal.

On réduit ce calcul a un énoncé local valable pour tous les GL_n-systèmes locaux sur X. Je donne pas les détails, je vais me concentrer plus sur mes travaux plus recents.

2) Les articles [4] et [6] est un travail dans la direction de la Conjecture 1 pour $G = \mathrm{G}\mathbb{S}\mathrm{p}_4$. Ils contiennent en partucilier: la catégorification et la démonstration de *la multiplicité un géometrique local* pour les modèles de Waldspurger pour GL_2 et de Bessel pour $\mathrm{G}\mathbb{S}\mathrm{p}_4$. Je renvoie aux articles pour les details, je vais me concentrer sur la partie suivante que je trouves le plus marquante.

3) La decouverte par A. Weil en 1964 de la representation du groupe métaplectique qui porte son nom désormais, a eu une influence majeure sur la théorie classique des formes automorphes. Elle a aussi permit d'appliquer les méthodes puissantes de la théorie des représentations aux series théta classiques.

Dans [5] on propose une interprétation géométrique de la représentation de Weil, qui la place dans le cadre du programme de Langlands géométrique.

a) *Résultats locaux.* On suppose $k = \mathbb{F}_q$ avec q impair. Soit $K = k((t))$ et $\mathcal{O} = k[[t]]$. Soit Ω le module complété des différentielles relatives de $\mathcal{O}$ sur k. On se donne un $\mathcal{O}$-module libre M de rang $2n$ muni d'une forme symplectique $\wedge^2 M \to \Omega$. Soit $G = \mathbb{S}\mathrm{p}(M)$. La construction de A. Weil de l'extension métaplectique

$$1 \to \{\pm 1\} \to \hat{G}(K) \to G(K) \to 1$$

repose sur le théorème de Stone et Von Neumann, qui affirme l'existence et l'unicité de la représentation lisse irréductible du groupe d'Heisenberg avec le caractère central donné. J'ai trouvé une autre construction de cette extension via les groupes de Kac-Moody. A savoir, regardons l'extension canonique

$$1 \to \mathbb{G}_m \to \bar{G}(K) \to G(K) \to 1,$$

ici $\bar{G}(K)$ est un ind-schéma sur k. Passant aux k-points, on obtient une extension des groupes abstrait

$$1 \to k^* \to \bar{G}(K) \to G(K) \to 1$$

Alors, l'extension métaplectique est le push-forward de celui-la par $k^* \to k^*/(k^*)^2$. C'est le point de départ pour le résultat suivant. Dès maintenant, k peut-être aussi algébriqument clôs de caracteristique $p > 2$.

Soit W le système local ℓ-adique sur $\mathbb{G}_m$ qui correspond au revêtement $\mathbb{G}_m \to \mathbb{G}_m$, $x \mapsto x^2$. On note $\mathrm{Gr}_G = G(K)/G(\mathcal{O})$ la grassmanienne affine de G. Soit $\widetilde{\mathrm{Gr}}_G$ le quotient de $\bar{G}(K)/G(\mathcal{O})$ par $\mathbb{G}_m$ au sens des champs, où $\mathbb{G}_m$ agit par $g \stackrel{x}{\to} x^2 g$, $x \in \mathbb{G}_m$, $g \in \bar{G}(K)$. Donc, $\widetilde{\mathrm{Gr}}_G \to \mathrm{Gr}_G$ est une μ_2-gerbe.

Soit $\mathrm{Sph}(\widetilde{\mathrm{Gr}}_G)$ la catégorie des faisceaux pervers $G(\mathcal{O})$-équivariants sur $\bar{G}(K)/G(\mathcal{O})$, qui sont en plus $(\mathbb{G}_m, W)$-équivariants. On munit alors $\mathrm{Sph}(\widetilde{\mathrm{Gr}}_G)$ d'une structure de catégorie tensorielle rigide.

Theorem 3. *On a une equivalance canonique des catégories tensorielles* $\mathrm{Sph}(\widetilde{\mathrm{Gr}}_G) \widetilde{\to} \mathrm{Rep}(\mathbb{S}\mathrm{p}_{2n})$.

b) *Résultats globaux.* Maintenant X est une courbe comme au debut, Ω est le faisceau canonique inversible sur X. Soit G le faisceau d'automorphsmes de $\mathcal{O}_X^n \oplus \Omega^n$ qui preservent la forme symplectique $\wedge^2(\mathcal{O}_X^n \oplus \Omega^n) \to \Omega$. Le champ Bun_G des G-torseurs sur X classifie un fibré vectoriel M de rang $2n$ sur X muni d'une forme symplectique $\wedge^2 M \to \Omega$.

Soit $\mathcal{A}$ le fibré linéaire sur Bun_G dont la fibre en M est $\det \mathrm{R}\Gamma(\bar{X}, M)$. Vu comme $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-gradué, il est purement de degré zero. Ici $\bar{X} = X \otimes \bar{k}$. Soit

$$\mathfrak{r} : \widetilde{\mathrm{Bun}}_G \to \mathrm{Bun}_G$$

le μ_2-gerbe des racines carrées de $\mathcal{A}$.

Si $k = \mathbb{F}_q$, on dispose de l'extension metaplectique classique $1 \to \{\pm 1\} \to \hat{G}(\mathbb{A}) \to \mathbb{G}(\mathbb{A}) \to 1$ muni des scindages naturels au-dessus de $\mathbb{G}(\mathcal{O})$ et $\mathbb{G}(F)$. Alors, on a une bijection naturelle

$$G(F)\backslash \hat{G}(\mathbb{A})/G(\mathcal{O}) \widetilde{\to} \widetilde{\mathrm{Bun}}_G(k),$$

où $\widetilde{\mathrm{Bun}}_G(k)$ designe l'ensemble des classes d'isomorphisme des k-points de $\widetilde{\mathrm{Bun}}_G$.

On introduit pour tout $\mathcal{A} \in \mathrm{Sph}(\widetilde{\mathrm{Gr}}_G)$ un foncteur de Hecke

$$\mathrm{H}(\mathcal{A}, \cdot) : \mathrm{D}(\widetilde{\mathrm{Bun}}_G) \to \mathrm{D}(X \times \widetilde{\mathrm{Bun}}_G)$$

de façon compatible avec la structure tensorielle sur $\mathrm{Sph}(\widetilde{\mathrm{Gr}}_G)$. Le programme de Langlands géométrique pour le groupe métaplectique est de chercher les faisceaux automorphes pour ces operateurs.

Soit ${}_i\mathrm{Bun}_G \subset \mathrm{Bun}_G$ le sous-champ localement fermé donné par $\dim \mathrm{H}^0(\bar{X}, M) = i$. Soit ${}_i\mathcal{B}$ le fibré linéaire sur ${}_i\mathrm{Bun}_G$ dont le fibre en $M \in \mathrm{Bun}_G$ est $\det \mathrm{H}^0(\bar{X}, M)$. Vu comme $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-gradué, il est placé en degré $\dim \mathrm{H}^0(\bar{X}, M)$ modulo 2. On a un isomorphisme $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-gradué ${}_i\mathcal{B}^2 \widetilde{\to} \mathcal{A} \mid_{{}_i\mathrm{Bun}_G}$, d'où une section ${}_i\rho : {}_i\mathrm{Bun}_G \to {}_i\widetilde{\mathrm{Bun}}_G$ du gerbe $\mathfrak{r}$ au-dessus de chaque strate. Soit ${}_i\mathrm{Aut}$ le système local sur ${}_i\widetilde{\mathrm{Bun}}_G$ donné par

$${}_i\mathrm{Aut} = \mathrm{Hom}_{S_2}(\mathrm{signe}, {}_i\rho_!\bar{\mathbb{Q}}_\ell)$$

Definition 2. Soit Aut_g (resp., Aut_s) le prolongement de Goresky-MacPherson de ${}_0\mathrm{Aut}[d](\frac{d}{2})$ (resp., de ${}_1\mathrm{Aut}[d-1](\frac{d-1}{2})$) par rapport a l'inclusion ${}_i\widetilde{\mathrm{Bun}}_G \to \widetilde{\mathrm{Bun}}_G$. Ici $d = \dim \mathrm{Bun}_G$, 'g' et 's' designe 'générique' et 'spéciale'. On verifie que ${}_1\mathrm{Aut}$ est un faisceau pervers décalé sur ${}_1\mathrm{Bun}_G$. On pose

$$\mathrm{Aut} = \mathrm{Aut}_g \oplus \mathrm{Aut}_s$$

Theorem 4. *Pour tout i on a un isomorphisme pour la $*$-restriction*

$$\mathrm{Aut}\,|_{{}_i\widetilde{\mathrm{Bun}}_G} \widetilde{\to}\, {}_i\mathrm{Aut}[d-i](\frac{d-i}{2})$$

La $*$-restriction de Aut_g (resp., de Aut_s) sur ${}_i\widetilde{\mathrm{Bun}}_G$ s'annule pour i impair (resp., pair). Si, en plus, $k = \mathbb{F}_q$ alors la fonction 'trace de Frobenius' de Aut est la fonction théta de Weil

$$\theta : G(F)\backslash \hat{G}(\mathbb{A})/G(\mathcal{O}) \to \bar{\mathbb{Q}}_\ell$$

On définit $\mathrm{St} \in \mathrm{D}(\mathrm{Spec}\, k)$ par

$$\mathrm{St} = \bar{\mathbb{Q}}_\ell[2n-1](\frac{2n-1}{2}) \oplus \bar{\mathbb{Q}}_\ell[2n-3](\frac{2n-3}{2}) \oplus \ldots \oplus \bar{\mathbb{Q}}_\ell[1-2n](\frac{1-2n}{2}),$$

ce sont les cohomologies de $\mathbb{P}^{2n-1}$ décalés.

Theorem 5. *Soit $\mathcal{A}_V \in \mathrm{Sph}(\widetilde{\mathrm{Gr}}_G)$ l'object qui correspond a la représentation standard V de $\mathbb{S}\mathrm{p}_{2n}$ via l'equivalence du Théorème 3. Alors, on a des isomorphisme au-dessus de $X \times \widetilde{\mathrm{Bun}}_G$*

$$\mathrm{H}(\mathcal{A}_V, \mathrm{Aut}_g) \widetilde{\to} \mathrm{St}[1](\frac{1}{2}) \boxtimes \mathrm{Aut}_s$$
$$\mathrm{H}(\mathcal{A}_V, \mathrm{Aut}_s) \widetilde{\to} \mathrm{St}[1](\frac{1}{2}) \boxtimes \mathrm{Aut}_g$$

Construction de Aut *via le model de Schrödinger* Notons Bun_n le champ des fibrés vectoriels de rang n sur X. Soit $P \subset G$ le parabolique de Siegel qui preserve le sous-fibré lagrangien $\mathcal{O}_X^n \subset \mathcal{O}_X^n \oplus \Omega^n$. Le champ Bun_P des P-torseurs sur X classifie les données suivantes: $L \in \mathrm{Bun}_n$ et une suite exacte des $\mathcal{O}_X$-modules

$$0 \to \mathrm{Sym}^2 L \to ? \to \Omega \to 0$$

La projection $\mathrm{Bun}_P \to \mathrm{Bun}_G$ se relève de façon naturelle à un morphisme $\nu : \mathrm{Bun}_P \to \widetilde{\mathrm{Bun}}_G$.

Soit $\mathcal{V}_2$ un champ qui classifie: $L \in \mathrm{Bun}_n$ et un morphisme $\mathrm{Sym}^2 L \to \Omega^2$ de $\mathcal{O}_X$-modules. Soit $\mathcal{V}$ un champ qui classifie: $L \in \mathrm{Bun}_n$ et un morphisme $s : L \to \Omega$. Notons $\pi : \mathcal{V} \to \mathcal{V}_2$ un morphisme au-dessus de Bun_n qui envoit s sur $s \otimes s$, c'est un morphisme fini. On pose

$$S_{P,\psi} = \mathrm{Four}_\psi(\pi_! \bar{\mathbb{Q}}_\ell)[\dim \mathcal{V}](\frac{\dim \mathcal{V}}{2}),$$

où $\mathrm{Four}_\psi : \mathrm{D}(\mathcal{V}_2) \to \mathrm{D}(\mathrm{Bun}_P)$ est la transformation de Fourier correspondant à un faisceau d'Artin-Shreier fixé $\mathcal{L}_\psi$ sur $\mathbb{A}^1_k$.

Theorem 6. *On a un isomorphisme sur* Bun_P

$$\nu^* \mathrm{Aut} \otimes \bar{\mathbb{Q}}_\ell[1](\frac{1}{2})^{\dim \mathrm{Bun}_P - \dim \mathrm{Bun}_G} \widetilde{\to} S_{P,\psi}$$

(sur les parties génériques et spéciales il est bien défini a une racine 4ème de l'unité près).

4) Le faisceau théta introduit tout à l'heure permet une approche géométrique à la correspondance de Howe classique. L'article [7] de mon mémoire est un travail dans cette direction.

Le résultat le plus marquant de cet article est la démonstration de la Conjecture 2 (c'est-a-dire, de la fonctorialité de Langlands géométrique) dans le cas suivant.

Soit k algébriquement clôs de caracteristique $p > 2$, X comme avant, $\pi : \tilde{X} \to X$ un revêtement étale de degré 2 avec $\tilde{X}$ connexe. On pose $\mathbb{H} = \mathbb{G}_m^2$, $H = \pi_*\mathbb{G}_m$ et $G = \mathbb{G} = \mathrm{GL}_2$. Soit $\Sigma = \mathrm{Aut}_X(\tilde{X})$, il agit sur $\check{\mathbb{H}}$ par permutation. On regarde le morphisme des L-groupes $H^L \to G^L \widetilde{\to} \mathrm{GL}_2 \times \pi_1(X, x)$ tel que la premiere composante est

$$H^L \to \check{\mathbb{H}} \ltimes \Sigma \hookrightarrow \mathrm{GL}_2$$

Donc, $\check{\mathbb{H}}$ s'idéntifie avec un tore maximal de GL_2, et l'image de H^L dans GL_2 est le normalisateur de ce tore.

Si $\mathcal{B} \in \mathrm{Bun}_H = \mathrm{Pic}\,\tilde{X}$ alors $V = \pi_*\mathcal{B}$ est muni d'une forme symmetrique nondégénéré $\mathrm{Sym}^2 V \to \mathcal{C}$, où $\mathcal{C} = N(\mathcal{B})$. On pose

$$\mathrm{Bun}_{H,G} = \mathrm{Bun}_H \times_{\mathrm{Pic}\, X} \mathrm{Bun}_G,$$

où $\mathrm{Bun}_H \to \mathrm{Pic}\, X$ envoit $\mathcal{B}$ en $N(\mathcal{B})$ et $\mathrm{Bun}_G \to \mathrm{Pic}\, X$ envoit M sur $(\det M)^{-1} \otimes \Omega$.

Notons Bun_{G_2} le champ qui classifie $W \in \mathrm{Bun}_4$ avec une forme symplectique $\wedge^2 W \to \Omega$. On a un morphisme $\tau : \mathrm{Bun}_{H,G} \to \mathrm{Bun}_{G_2}$ qui envoit $\mathcal{B}, M$ sur $V \otimes M$. Il se relève de façon naturel à un morphisme

$$\tilde{\tau} : \mathrm{Bun}_{H,G} \to \widetilde{\mathrm{Bun}}_{G_2}$$

On pose $\mathrm{Aut}_{H,G} = \tilde{\tau}^* \mathrm{Aut}[\dim.\mathrm{rel}(\tau)]$, de meme façon on définit les parties génériques et spéciales de $\mathrm{Aut}_{H,G}$. On définit $F : \mathrm{D}(\mathrm{Bun}_H) \to \mathrm{D}(\mathrm{Bun}_G)$ par

$$F(K) = p_{G!}(p_H^* K \otimes \mathrm{Aut}_{H,G})[-\dim \mathrm{Bun}_H]$$

pour le diagramme des projections $\mathrm{Bun}_H \stackrel{p_H}{\leftarrow} \mathrm{Bun}_{H,G} \stackrel{p_G}{\to} \mathrm{Bun}_G$. De meme façon, on a des foncteurs ${}_S F : \mathrm{D}(S \times \mathrm{Bun}_H) \to \mathrm{D}(S \times \mathrm{Bun}_G)$ pour un schéma S quelconque.

Theorem 7. *1) Les faisceaux* $\mathrm{Aut}_{H,G,s}$ *et* $\mathrm{Aut}_{H,G,g}$ *sont pervers irréductibles. On a canoniquement* $\mathbb{D}(\mathrm{Aut}_{H,G}) \widetilde{\to} \mathrm{Aut}_{H,G}$.
2) Le faisceau $\mathrm{Aut}_{H,G}$ *est ULA par rapport à* $\mathrm{Bun}_{H,G} \to \mathrm{Bun}_H$*, donc* F *commute avec la dualité de Verdier.*
3) Le foncteur F *commute avec les operateurs de Hecke au sens de la Conjecture 2.*

Une des applications importantes de ce théorème est *le calcul des périodes géométriques de Waldpurger pour* GL_2.

Soit U_π le noyau de l'application norme $\pi_*\mathbb{G}_m \to \mathbb{G}_m$. On note Bun_{U_π} le champ des U_π-torseurs sur X. Soit $e_\pi : \mathrm{Pic}\,\tilde{X} \to \mathrm{Bun}_{U_\pi}$ le morphisme qui envoit $\mathcal{B}$ sur $\mathcal{B}^{-1} \otimes \sigma^*\mathcal{B}$, ici $\sigma \in \Sigma$ l'élément nontrivial. Soit $\mathrm{mult}_\pi : \mathrm{Bun}_{U_\pi} \times \mathrm{Bun}_{U_\pi} \to \mathrm{Bun}_{U_\pi}$ l'application produit (Bun_{U_π} est un champ en groupes).

Notons $\tilde{X}^{(d)}$ la puissance d-ème symmétrique de X, il classifie les diviseurs effectifs sur $\tilde{X}$ de degré d. Soit $m_d : \tilde{X}^{(d)} \to \mathrm{Bun}_{U_\pi}$ l'application qui envoit D sur $\mathcal{O}(D - \sigma^*D)$. Soit $\pi_1 : \mathrm{Pic}\,\tilde{X} \to \mathrm{Bun}_2$ le morphisme qui envoit $\mathcal{B}$ sur $\pi_*\mathcal{B}$. Soit $A\mathcal{J}$ le système local automorphe sur $\mathrm{Pic}\,\tilde{X}$ qui correspond a $\mathcal{J}$ par la theorie des corps de classes géométrique.

Theorem 8. *Soit E un $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$-système local irréductible de rang 2 sur X, on note Aut_E le faisceau automorphe correspondant (normalisé comme dans l'article de Gaitsgory). Soit $\mathcal{J}$ un $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$-système local de rang 1 sur $\tilde{X}$ muni d'un isomorphisme $\det E \widetilde{\to} N(\mathcal{J})$. Alors,*

$$A\mathcal{J}^{-1} \otimes \pi_1^* \mathrm{Aut}_E[\dim.\mathrm{rel}(\pi_1)]$$

se descend à un complex bien defini $\mathcal{K}_E$ sur Bun_{U_π}, qui est une somme directe des faisceaux pervers (eventuellement décalés). On a un isomorphisme

$$\mathrm{mult}_{\pi!}(\mathcal{K}_E \boxtimes \mathcal{K}_E) \widetilde{\to} \oplus_{d\geq 0}\, m_{d!}(\mathcal{J} \otimes \phi^* E^*)^{(d)}[d]$$

(j'ai ignoré les twists de Tate ici). (Pour avoir iso canonique, il faut tensoriser à droite par un espace vect. précis de dim 1).

Appendix for myself

A.1 Dans l'introduction, la donnée de G sur X donne lieu au $\mathrm{Aut}(\mathbb{G})$-torseur $\mathrm{Isom}(\mathbb{G}, G)$ sur X, qui par extension des scalaires induit un $\mathrm{Out}(\mathbb{G})$-torseur, c'est-a-dire, un revêtement $\pi : \tilde{X} \to X$. Alors, sur $\tilde{X}$ on obtient un $\mathbb{G}_{ad}$-torseur $\mathcal{F}_{\mathbb{G}_{ad}} := \mathrm{Isom}(\mathbb{G}, G\mid_{\tilde{X}})$ defini canoniquement. D'où un isomorphisme canonique $G\mid_{\tilde{X}} \widetilde{\to} \mathcal{F}_{\mathbb{G}_{ad}} \times_{\mathbb{G}_{ad}} \mathbb{G}$. Le groupe $\Sigma = \mathrm{Aut}_X(\tilde{X})$ agit sur le $\tilde{X}$-schéma en groupes $\mathcal{F}_{\mathbb{G}_{ad}} \times_{\mathbb{G}_{ad}} \mathbb{G}$.

Le fait que G est quasi-déployé veut dire qu'on peut trivialiser $\mathcal{F}_{G_{ad}}$ de façon que l'action obtenue de Σ sur $\mathbb{G}$ preserve un épinglage de $\mathbb{G}$.

La définition de $\mathrm{H}(\mathcal{A}_V, \cdot) : \mathrm{D}(\mathrm{Bun}_G) \to \mathrm{D}(\tilde{X} \times \mathrm{Bun}_G)$ dans Def 1 est la suivante. Pour $V = V^\lambda$, une représentation irréductible de $\check{\mathbb{G}}$, on regarde $\overline{\mathcal{H}}_G^\lambda$ le champ qui classifie $\mathcal{F}_G^1, cF_G^2$ sur X, $\tilde{x} \in \tilde{X}$ et un isomorphisme

$$\mathcal{F}_G^1 \widetilde{\to} \mathcal{F}_G^2\mid_{X-\pi(\tilde{x})}$$

tel que le $(\mathcal{F}_G^2)\mid_{\tilde{X}}$ est dans la position $\leq \lambda$ par rapport à $(\mathcal{F}_G^1)\mid_{\tilde{X}}$ en $\tilde{x}$. Ici on a regardé $(\mathcal{F}_G^i)\mid_{\tilde{X}}$ en tant que $\mathbb{G}$-torseurs (rappelons qu'on a fixe un isomorphisme $G\mid_{\tilde{X}} \widetilde{\to} \mathbb{G}$ de sorte que Σ agit sur $\mathbb{G}$ en preservant un épinglage). Cette condition est equivalente a dire que pour $\sigma \in \Sigma$, $(\mathcal{F}_G^2) \mid_{\tilde{X}}$ est dans la position $\leq \sigma\lambda$ par rapport à $(\mathcal{F}_G^1) \mid_{\tilde{X}}$ en $\sigma\tilde{x}$.

On pose

$$\mathrm{H}^\lambda(K) = (\mathrm{supp} \times p_1)_!(p_2^* K \otimes \mathrm{IC}_{\overline{\mathcal{H}}_G^\lambda})[-\dim \mathrm{Bun}_G]$$

D'où les isomorphismes

$$(\sigma \times \mathrm{id})^* \mathrm{H}^\lambda \widetilde{\to} \mathrm{H}^{\sigma^{-1}\lambda}$$

pour les operateurs de Hecke.

L'action tordue de Σ sur E est la donne suivante. Pour $\sigma \in \Sigma$ soit E^σ le système local sur $\tilde{X}$ qui est le composé $\pi_1(\tilde{X}, x) \to \check{\mathbb{G}} \xrightarrow{\sigma} \check{\mathbb{G}}$. Alors, on demande des isomorphismes $\sigma^* E \widetilde{\to} E^\sigma$ pour tout $\sigma \in \Sigma$ qui sont compatibles.

Le groupe dual $\check{\mathbb{G}}$ est par def munie d'un epinglage: $\check{\mathbb{T}} \subset \check{\mathbb{G}}$, racines simples α_i et vecteurs $x_{\alpha_i} \in \mathrm{Lie}\, \check{\mathbb{G}}$ dans les sous-espaces radiciels correspondants. Donc, $\mathrm{Out}(\mathbb{G})$ agit naturellement sur $\check{\mathbb{G}}$. Par def, G^L est le produit semidirect pour l'action $\pi_1(X, x) \to \mathrm{Out}(\mathbb{G}) \to \mathrm{Aut}(\check{\mathbb{G}})$.

A.2 The isomorphisme in Th 4 is not canonical: defined up to a 4th root of unity.