Feuille 1. Calcul propositionnel.

On note $\top$ la proposition vraie (indépendement des valeurs des variables propositionnelles). On note $\perp$ la proposition fausse (indépendement des valeurs des variables propositionnelles).

1. Montrer que $\neg(\neg P)$ est équivalent a P.

2. Demontrer la loi de De Morgan: $\neg(P \wedge Q)$ est équivalent à $(\neg P) \vee (\neg Q)$; $\neg(P \vee Q)$ est équivalent à $(\neg P) \wedge (\neg Q)$.

3. Démontrer que $P \Rightarrow Q$ est équivalent à $(\neg Q) \Rightarrow (\neg P)$ (on appelle cette proposition contraposition).

4. Démontrer les formules suivants
a) $P \wedge (P \vee Q) = P$
b) $P \vee (P \wedge Q) = P$.

5. En utilisant uniquement les connecteurs $\neg$ et $\wedge$, écrire des propositions équivalentes aux propositions $P \vee Q$, $P \Rightarrow Q$, $P \Leftrightarrow Q$.

6. Le connecteur binaire $|$ appelé barre de Sheffer est defini par $P \mid Q = \neg(P \wedge Q)$. Montrer qu'on peut reconstruire les connecteurs $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ en utilisant uniquement la barre de Sheffer (on pourra pour cela utiliser les résultats de l'exercice précédent).

7. Simplifier les propositions suivants (ici P, Q, R sont des propositions)

- $P \vee \top$
- $Q \wedge \top$
- $P \vee \perp$
- $(P \wedge (P \vee Q)) \vee (P \vee (Q \wedge P))$
- $((P \vee P) \vee (Q \wedge Q)) \vee ((\neg P) \wedge (\neg Q))$
- $(P \vee \perp) \wedge (Q \wedge \top)$
- $(P \Rightarrow (\top \Rightarrow Q)) \wedge (Q \Rightarrow (P \vee \perp))$
- $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow P) \Rightarrow P$
- $((P \Rightarrow Q) \wedge P) \Rightarrow Q$
- $((P \Rightarrow Q) \wedge (\neg Q)) \Rightarrow (\neg P)$
- $((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$

8. On considère une collection d'objets qui vérifient certaines propriétés. Chacun de ces objets est sphérique ou cubique, de couleur verte ou rouge; il peut etre creux ou plein, en bois ou en polystyrène. Sachant que tout objet vert est plein, que tout objet en polystyrène est creux, que tout objet en bois est une sphère, que tout objet rouge est en polystyrène et que tout cube est vert, montrer que tout objet dans cette collection est spherique.

9. Le test de selection de carte. On place 4 cartes devant vous. Sur chacune de ces cartes est inscrit, d'un coté une lettre, de l'autre un chiffre. Certaines sont placées de sorte que leur chiffre soit visible, d'autres leur lettre. Après avoir placé les cartes, vous pouvez lire sur ces cartes les symboles $B, 8, E, 3$. Soit P la proposition suivante: si une voyelle est inscrite sur une carte, alors sur l'autre face est inscrit un chiffre impair. Quelle(s) carte(s) faut-il retourner pour déterminer si P est vraie?

10. Quels sont les connecteurs binaires commutatifs? (un connecteur binaire $\cdot$ est commutatif signifie que $P \cdot Q$ est équivalent à $Q \cdot P$)

11. Quels sont les connecteurs binaires associatifs? (un connecteur binaire $\cdot$ est associatif signifie que $(P \cdot Q) \cdot R$ est équivalent à $P \cdot (Q \cdot R)$, donc on peut se passer du parenthésage).

12. Demontrer la propriété de distributivité de la conjonction sur la disjonction: $(P \vee Q) \wedge R$ est équivalent à $(P \wedge R) \vee (Q \wedge R)$. La disjonction est-elle distributive sur la conjonction?

Dans les exercices suivants E est un ensemble, $P(x)$ un prédicat qui dépend d'une variable $x \in E$.

13. Exprimer la proposition "il existe un unique $x \in E$ tel que $P(x)$" en utilisant les connecteurs binaires. Trouver un example d'un prédicat $P(x, y)$ (avec $x, y \in E$) tel que "pour tout $x \in E$ il existe $y \in E$ tel que $P(x, y)$" soit vrai et "il existe $x \in E$ tel que pour tout $y \in E$ $P(x, y)$" soit faux.

14. Simplifier les descriptions

- $\{x \in [0,1] \mid \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, x < \frac{1}{1+n}\}$
- $\{x \in [0,1] \mid \text{il existe } n \in \mathbb{N}, x < \frac{1}{1+n}\}$

15. Formuler dans le cadre du calcul des prédicats l'assertion: "tout homme est mortel, Socrate est un homme, donc Socrate est mortel". De même pour l'assertion "tout les chats sont mortels, Socrate est mortel, donc Socrate est un chat".

16. Soit f une fonction sur $\mathbb{Q}$. Formuler dans le cadre du calcul des prédicats l'assertion:

- la fonction f est décroissante
- la fonction f est bornée
- la fonction f est périodique