Algèbre 2008-2009

Feuille 1

1. Soit A un anneau intègre. Supposons que soit A est fini, soit A est une k-algèbre de dimension finie, où k est un corps. Montrer que A est un corps.

2. Soit k un corps et $a \in k$. Montrer que l'ideal $(x - a)$ dans $k[x]$ coincide avec $\{p \in k[x] \mid p(a) = 0\}$.

3. Montrer que les ideaux premiers dans $\mathbb{Z}$ sont de la forme (n), où n est premier ou $n = 0$. Les ideaux maximaux de $\mathbb{Z}$ sont de la forme (n), où n est premier.

4. Soit k un corps. Si $a_1, \ldots, a_n \in k$ alors l'idéal $(x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n) \subset k[x_1, \ldots, x_n]$ est maximal. Montrer que si $n > 1$ alors il n'est pas principal.

5. Soit A un anneau. Montrer que l'ensemble I des éléments nilpotents de A est un idéal et A/I n'a pas de nipotents $\neq 0$. (Cet idéal s'appelle le *nilradical* de A).

6. Soit k un corps et $B \subset k[t]$ la sous-algèbre endendrée sur k par t^2 et t^3, c.a.d., $B = k[t^2, t^3]$. Montrer que les monômes 1 et t^i pour $i \geq 2$ forment une base du k-espace vectoriel B.

Soit $A = k[x, y]$. Soit $f : A \to B$ l'homomorphisme de k-algèbres défini par $f(x) = t^2$, $f(y) = t^3$. Soit $I \subset A$ l'idéal engendré par $x^3 - y^2$. Montrer que $I \subset \operatorname{Ker} f$ et tout élément de A/I s'écrit comme $P(x) + yQ(x)$ avec $P, Q \in k[x]$. Montrer ensuite que les éléments x^p et yx^q pour $p, q \geq 0$ forment une base dans le k-espace vectoriel A/I. En déduire que $I = \operatorname{Ker} f$ et $A/I \xrightarrow{\sim} B$.

7. Soit $A = k[u, v, z]$ et $B = k[x, y]$. Soit $f : A \to B$ l'homomorphisme défini par $f(u) = x^2$, $f(v) = y^2$ et $f(z) = xy$. Soit I l'idéal de A engendré par $uv - z^2$. Montrer que $I = \operatorname{Ker} f$ et A/I est isomorphe au sous-k-algèbre de B engendré par x^2, y^2 et xy.

8. Soit n en entier positif. Calculer le radical de l'idéal (n) dans $\mathbb{Z}$.

9. Soit $a, b \in \mathbb{Z}$. Alors, on a les égalités des ideaux dans $\mathbb{Z}$

$$(a) + (b) = (d) \quad \text{et} \quad (a) \cap (b) = (m),$$

où $d = pgcd(a, b)$ et $m = ppcm(a, b)$. Comme $(a)(b) = (ab)$, on obtient que $(a)(b) = (a) \cap (b)$ ssi a et b sont premiers entre eux.

10. Soit $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c} \subset A$ des idéaux tels que $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}$ ou $\mathfrak{c} \subset \mathfrak{a}$. Montrer que

$$\mathfrak{a} \cap (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} + \mathfrak{a} \cap \mathfrak{c}$$

11. Soit A un anneau, $x \in A$ un nilpotent, $a \in A^*$. Montrer que $a + x \in A^*$.

12. Soit A un anneau et $A[[x]]$ l'anneau des séries formelles en une variable x.
a) Décrire le groupe d'éléments inversibles dans $A[[x]]$.

b) Soit $A[x]$ l'anneau des polynômes sur A en une variable x. Soit $f = a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n \in A[x]$. Montrer que
i) f est inversible ssi $a_0 \in A^*$ et $a_1, \ldots, a_n$ sont nilpotents;
ii) f est nilpotent ssi $a_0, \ldots, a_n$ sont nilpotents; iii) f est un diviseur de zéro ssi il existe $b \in A$ tel que $bf = 0$.

13. Soit A un anneau, $A[[t]]$ l'anneau des séries formelles sur x s'une variable t. Soit $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$. Montrer que
i) f est inversible ssi $a_0 \in A^*$;
ii) si f est nilpotent alors a_n est nilpotent pour tout $n \geq 0$.

14. Soit $A = \mathbb{Z}[i] = \mathbb{Z}[x]/(x^2+1)$. Calculer le groupe A^*.

15. Soit A un anneau et $S \subset A$ une partie multiplicative. Soit M un A-module de type fini. Montrer que $S^{-1}M = 0$ ssi il existe $s \in S$ tel que $sM = 0$.

16. Soit A un anneau. On suppose que pour tout idéal premier $\mathfrak{p} \subset A$ l'anneau $A_{\mathfrak{p}}$ n'a pas de nilpotents ($\neq 0$). Montrer que A n'a pas de nilpotents.

17. Soit A un anneau et S l'ensemble de tous les éléments de A qui ne sont pas les diviseurs de zero. Montrer que S est une partie multiplicative et l'homomoprhisme canonique $A \to S^{-1}A$ est injective. Montrer que tout élément de $S^{-1}A$ est soit inversible soit un diviseur de zéro.

Supposons que tout élément de A est soit inversible, soit un diviseur de zero. Montrer alors que $A \to S^{-1}A$ est un isomorphisme.

18. Soit A un anneau ou tout idéal est principal (anneau d'idéaux principaux). Si $f : A \to B$ est un homomorphisme surjective d'anneau, montrer que tout idéal de B est principal.

19. Soit A un anneau intègre. Montrer que $A[x]$ et $A[[x]]$ sont intègres. Décrire le groupe d'éléments dans $A[x]$ et dans $A[[x]]$. Montrer que $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n \in A[x]$ est nilpotent ssi tous les $a_i \in A$ sont nilpotents.

20. Soit $\mathbb{H}$ l'ensembles de toutes les matrices $A \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$ de la forme

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}, \tag{1}$$

où $a, b \in \mathbb{C}$. Montrer que $\mathbb{H}$ est une $\mathbb{R}$-sous-algèbre de $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$. Est-ce une $\mathbb{C}$-sous-algèbre? Montrer que $\mathbb{H}$ est une algèbre a division.

Soit B la partie de H donnée par la condition que tous les éléments de la matrice (1) sont dans $\mathbb{R}$. Montrer que B est une $\mathbb{R}$-sous-algèbre de $\mathbb{H}$. Établir un isomorphisme des $\mathbb{R}$-algèbres $\mathbb{C} \xrightarrow{\sim} B$.

Montrer que le centre de $\mathbb{H}$ s'identifie à l'image de l'homomorphisme $\mathbb{R} \to \mathbb{H}$, $a \mapsto diag\{a, a\}$.

21. Un *idempotent* dans un anneau A est un élément $e \in A$ tel que $e^2 = e$. Supposons que A est intègre. Montrer que 0 et 1 sont les seuls idempotents dans A.