LICENCE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

DEUXIÈME ANNÉE

PARCOURS MATHÉMATIQUES

Unité d'enseignement LMI 4.32

GÉOMÉTRIE 1

Françoise GEANDIER

Université Henri Poincaré Nancy I

Département de Mathématiques

Table des matières

CHAPITRE I - ESPACES AFFINES

1. Espaces affines

1.1 Définition

Soit E un ensemble non vide et $\overrightarrow{E}$ un espace vectoriel sur un corps commutatif K ; on dit que E est un espace affine associé à l'espace vectoriel $\overrightarrow{E}$ si et seulement si il existe une application

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & E \times E & \to & \overrightarrow{E} \\ & (A,B) & \mapsto & \varphi(A,B) = \overrightarrow{AB} \end{array}$$

vérifiant les conditions suivantes :

a) $\forall\ A \in E$, $\forall\ \overrightarrow{u} \in \overrightarrow{E}$, il existe un unique point $B \in E$ tel que $\overrightarrow{u} = \varphi(A,B) = \overrightarrow{AB}$.

b) On a la relation de Chasles : $\forall\ A,B,C \in E$, $\varphi(A,C) = \varphi(A,B) + \varphi(B,C)$, i.e
$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.

On définit la dimension de l'espace affine E en posant $\dim E = \dim \overrightarrow{E}$: on a ainsi la notion de droite et de plan affine.

1.2 Exemple

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ peut être muni d'une structure d'espace affine en prenant $\mathbb{R}^n$ comme espace vectoriel associé à l'espace affine $\mathbb{R}^n$ et en considérant l'application φ suivante

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ & (A,B) & \mapsto & \varphi(A,B) = B - A \end{array}$$

on constate alors aisément que φ vérifie les conditions requises et ainsi $\mathbb{R}^n$ est un espace affine de dimension n.

1.3 Proposition

Soit E un espace affine ; alors pour tous points A, B, C et D de E, on a :

a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0} \iff A = B$;

b) $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$;

c) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \iff \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.

1.4 Proposition et définition

Soit E un espace affine de dimension finie et soit O un point de E ; alors l'application

$$\begin{array}{rccl} \varphi_O : & E & \to & \overrightarrow{E} \\ & M & \mapsto & \overrightarrow{OM} \end{array}$$

est une bijection : on dit qu'on choisit O comme origine de l'espace affine E ; si O est un point de E et $\mathcal{B}$ une base de $\overrightarrow{E}$, $(O,\mathcal{B})$ est appelé repère cartésien de l'espace affine E d'origine O.

1.5 Définition

Soient (E,φ) un espace affine, A un point de E et $\overrightarrow{F}$ un sous-espace vectoriel de $\overrightarrow{E}$: on appelle sous-espace affine passant par A et de direction $\overrightarrow{F}$ l'ensemble F des points M de E tels que $\overrightarrow{AM} \in \overrightarrow{F}$: F est naturellement muni d'une structure d'espace affine grâce à la restriction à $F \times F$ de l'application φ et son espace vectoriel associé n'est autre que $\overrightarrow{F}$.

Deux sous-espaces affines F_1 et F_2 sont dits parallèles si et seulement si $\overrightarrow{F_1} = \overrightarrow{F_2}$.

2 Applications affines

2.1 Définition

Soient E et F deux espaces affines ; on dit qu'une application f de E dans F est une application affine s'il existe une application linéaire $\overrightarrow{f}$ de $\overrightarrow{E}$ dans $\overrightarrow{F}$ telle que

$$\forall\ A,\ B \in E, \quad \overrightarrow{f(A)f(B)} = \overrightarrow{f}\,(\overrightarrow{AB}).$$

On dit alors que l'application $\overrightarrow{f}$ (qui est unique) est l'application linéaire associée à l'application affine f.

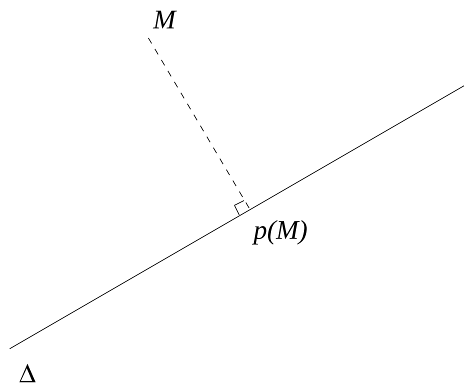
Exemples

a) Soit O un point du plan affine P et k un réel non nul ; alors l'homothétie de centre O et de rapport k définie par

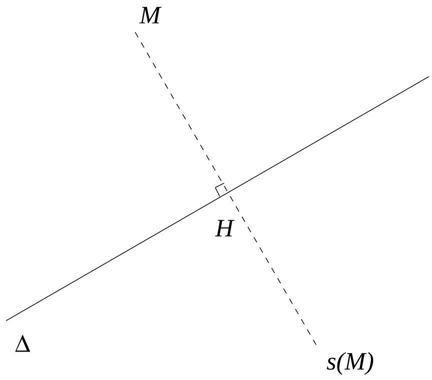
$$\forall A \in P, \overrightarrow{Oh(A)} = k\ \overrightarrow{OA}$$

est une application affine d'application linéaire associée l'homothétie vectorielle $\vec{h}(\vec{u}) = k\vec{u}$.

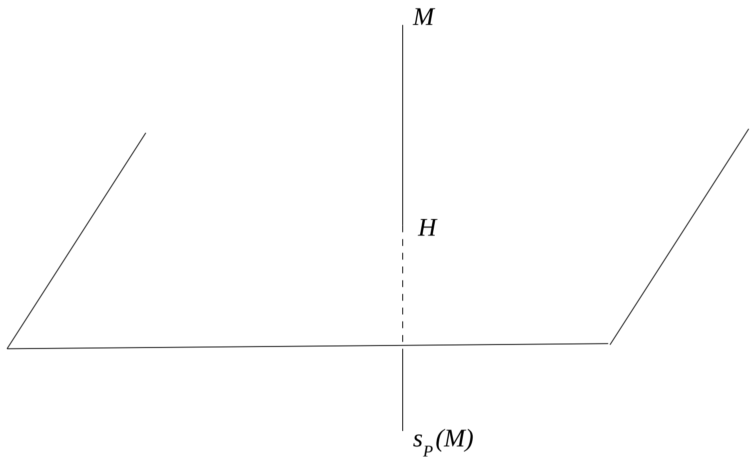
b) La projection orthogonale p sur une droite Δ du plan affine euclidien est une application affine : son application linéaire associée n'est autre que la projection orthogonale sur la droite vectorielle $\overrightarrow{\Delta}$.



c) La symétrie orthogonale s par rapport à une droite Δ du plan affine euclidien est une application affine appelée symétrie axiale d'axe Δ : son application linéaire associée n'est autre que la symétrie orthogonale par rapport à la droite vectorielle $\overrightarrow{\Delta}$.



d) De même la symétrie orthogonale s_P par rapport à un plan P de l'espace euclidien de dimension 3 est une application affine appelée réflexion de plan P : son application linéaire associée n'est autre que la symétrie orthogonale par rapport au plan vectoriel $\overrightarrow{P}$.



Preuve :

a) Pour tous points A et B de P on a

$$\overrightarrow{h(A)h(B)} = \overrightarrow{Oh(B)} - \overrightarrow{Oh(A)} = k\ \overrightarrow{OB} - k\ \overrightarrow{OA} = k\ \overrightarrow{AB} = \vec{h}(\overrightarrow{AB}).$$

b) Considérons la projection orthogonale p sur une droite Δ du plan affine euclidien : pour tout point M de P, $H = p(M)$ est défini par $H \in \Delta$ et $\overrightarrow{MH}$ est orthogonal à $\vec{e_1}$ vecteur directeur unitaire de Δ.

Notons π la projection orthogonale sur la droite vectorielle $\overrightarrow{\Delta}$ et considérons $\vec{e_2}$ un vecteur unitaire orthogonal à $\vec{e_1}$: alors $(\vec{e_1},\vec{e_2})$ est une base orthonormée de $\overrightarrow{P}$ et pour tout vecteur $\vec{u}$ de $\overrightarrow{P}$, on a $\pi(\vec{u}) = \langle \vec{u} | \vec{e_1} \rangle \vec{e_1}$.

Soient M et N deux points de P et $H = p(M)$, $K = p(N)$ leurs images par p, alors on a

$$\overrightarrow{MN} = \langle \overrightarrow{MN} | \vec{e_1} \rangle \vec{e_1} + \langle \overrightarrow{MN} | \vec{e_2} \rangle \vec{e_2}$$

et

$$\pi(\overrightarrow{MN}) = \langle \overrightarrow{MN} | \vec{e_1} \rangle \vec{e_1}.$$

D'autre part on a $\overrightarrow{p(M)p(N)} = \overrightarrow{HK} = \langle\overrightarrow{HK}|\vec{e_1}\rangle\vec{e_1}$ car $\langle\overrightarrow{HK}|\vec{e_2}\rangle = 0$ et $\langle\overrightarrow{MN}|\vec{e_1}\rangle = \langle(\overrightarrow{MH}+\overrightarrow{HK}+\overrightarrow{KN})|\vec{e_1}\rangle = \langle\overrightarrow{MH}|\vec{e_1}\rangle+\langle\overrightarrow{HK}|\vec{e_1}\rangle+\langle\overrightarrow{KN}|\vec{e_1}\rangle = \langle\overrightarrow{HK}|\vec{e_1}\rangle$ puisque $\overrightarrow{MH}$ et $\overrightarrow{KN}$ sont orthogonaux à $\vec{e_1}$. On en déduit alors que

$$\pi(\overrightarrow{MN}) = \overrightarrow{p(M)p(N)}$$

et ainsi p est une application affine d'application linéaire associée π.

La démonstration est analogue pour une symétrie orthogonale par rapport à une droite Δ du plan affine euclidien ou par rapport à un plan de l'espace affine euclidien de dimension 3.

□

2.2 Proposition

Soient f et g deux applications affines coïncidant en un point A et telles que $\vec{f} = \vec{g}$; alors $f = g$.

Preuve :

Soit M un point de E ; alors $\overrightarrow{f(A)f(M)} = \vec{f}(\overrightarrow{AM}) = \vec{g}(\overrightarrow{AM}) = \overrightarrow{g(A)g(M)} = \overrightarrow{f(A)g(M)}$ donc $f(M) = g(M)$ et ainsi $f = g$.

□

2.3 Proposition

Soient E, F et G des espaces affines ; si f est une application affine de E dans F et si g est une application affine de F dans G, alors $g \circ f$ est une application affine de E dans G et $\overrightarrow{g \circ f} = \overrightarrow{g} \circ \overrightarrow{f}$.

2.4 Proposition

Soit f une application affine d'un espace affine E dans un espace affine F, alors on a :

a) f est injective $\Longleftrightarrow \overrightarrow{f}$ est injective ;

b) f est surjective $\Longleftrightarrow \overrightarrow{f}$ est surjective ;

c) f est bijective $\Longleftrightarrow \overrightarrow{f}$ est bijective.

2.5 Corollaire

Toute symétrie axiale est une application affine bijective.

2.6 Proposition

Soit f une application affine bijective d'un espace affine E dans un espace affine F, alors l'application f^{-1} est affine et $\overrightarrow{f^{-1}} = (\overrightarrow{f})^{-1}$ (et nécessairement $\dim E = \dim F$).

2.7 Proposition

Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des applications affines bijectives ; alors $(\mathcal{A},\circ)$ est un groupe.

Preuve : c'est une conséquence immédiate de 2.3 et 2.6.

$\square$

2.8 Proposition

Soit f une application affine d'un espace affine E dans lui-même ; si f possède un point fixe A, alors l'ensemble des points fixes de f est le sous-espace affine passant par le point A et de direction $\ker(\vec{f} - Id_{\vec{E}})$.

Preuve :

Soit M un point de E, alors on a :

$$f(M) = M \Longleftrightarrow \vec{f}(\overrightarrow{AM}) = \overrightarrow{f(A)f(M)} = \overrightarrow{AM} \Longleftrightarrow \overrightarrow{AM} \in \ker(\vec{f} - Id_{\vec{E}})$$

d'où le résultat.

$\square$

2.9 Expression dans un repère

Soit f une application affine d'un espace affine E de dimension finie n dans un espace affine F de dimension finie p.

Considérons un point O de E et un point Ω de F, puis une base $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\cdots,\overrightarrow{e_n})$ de $\overrightarrow{E}$ et une base $\mathcal{B}' = (\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},\cdots,\overrightarrow{u_p})$ de $\overrightarrow{F}$; alors on peut exprimer f dans les repères $(O,\mathcal{B})$ de E et $(\Omega,\mathcal{B}')$ de F de la façon suivante :
tout point A de E s'écrit de manière unique dans le repère $(O,\mathcal{B})$ sous la forme
$\overrightarrow{OA} = x_1\overrightarrow{e_1} + \cdots x_n\overrightarrow{e_n}$ d'où,

$$\begin{array}{rcl}
\overrightarrow{\Omega f(A)} & = & \overrightarrow{\Omega f(O)} + \overrightarrow{f(O)f(A)} \\
& = & \overrightarrow{\Omega f(O)} + \overrightarrow{f}\,(\overrightarrow{OA}) \\
& = & \overrightarrow{\Omega f(O)} + x_1\,\overrightarrow{f}\,(\overrightarrow{e_1}) + \cdots + x_n\,\overrightarrow{f}\,(\overrightarrow{e_n}) \\
& = & \overrightarrow{\Omega f(O)} + \mathcal{M}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}
\end{array}$$

où $\mathcal{M}$ est la matrice de $\overrightarrow{f}$ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.

3 Lien avec les barycentres

3.1 Définition

Soient $(M_1, \cdots, M_r)$ une famille de points d'un espace affine E et $(\lambda_1, \cdots, \lambda_r)$ une famille de réels tels que $\lambda_1 + \cdots + \lambda_r = 1$; on appelle barycentre des points $(M_1, \cdots, M_r)$ affectés des coefficients $(\lambda_1, \cdots, \lambda_r)$ l'unique point G défini par :

$$\forall\, O \in E,\ \overrightarrow{OG} = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \overrightarrow{OM_i}.$$

3.2 Proposition

Soient $(M_1, \cdots, M_r)$ une famille de points d'un espace affine E et $(\lambda_1, \cdots, \lambda_r)$ une famille de réels tels que $\lambda_1 + \cdots + \lambda_r = 1$; alors G est le barycentre des points $(M_1, \cdots, M_r)$ affectés des coefficients $(\lambda_1, \cdots, \lambda_r)$ si et seulement si :

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i \overrightarrow{GM_i} = \overrightarrow{0}.$$

3.3 Théorème

a) Soit f une application affine d'un espace affine E dans un espace affine F et soit G le barycentre des points $(M_1, \cdots, M_r)$ de E affectés des coefficients $(\lambda_1, \cdots, \lambda_r)$; alors $f(G)$ est le barycentre des points $(f(M_1), \cdots, f(M_r))$ de F affectés des coefficients $(\lambda_1, \cdots, \lambda_r)$.

b) Réciproquement, si f est une application d'un espace affine E dans un espace affine F vérifiant la propriété suivante $(\mathcal{P})$:

$(\mathcal{P})$: pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et pour tous A et B dans E, si G est le barycentre de $A(\lambda)$ et de $B(1-\lambda)$, $f(G)$ est le barycentre de $f(A)(\lambda)$ et de $f(B)(1-\lambda)$;

alors l'application f est affine.

3.4 Corollaire

Si f est une application affine d'un espace affine E dans un espace affine F, l'image par f d'une droite est une droite ou un point ; l'image par f d'un plan est un plan, une droite ou un point ; l'image par f d'un segment est un segment ou un point.

3.5 Définition

Soit E un espace affine de dimension finie n ; on appelle repère barycentrique de E tout $(n+1)$-uplet de points $(M_0, \cdots, M_n)$ de E tels que le système de vecteurs $(\overrightarrow{M_0M_1}, \cdots, \overrightarrow{M_0M_n})$ est une base de $\overrightarrow{E}$.

Ainsi, un repère barycentrique d'un espace affine de dimension 3 est la donnée de 4 points non coplanaires, un repère barycentrique d'un plan affine est la donnée de 3 points non alignés et un repère barycentrique d'une droite affine est la donnée de 2 points distincts.

3.6 Proposition et définition

Soit E un espace affine de dimension finie n et $(M_0, \cdots, M_n)$ un repère barycentrique de E ; alors à tout point A de E est associé un unique $(n+1)$-uplet de réels $(\lambda_0, \cdots, \lambda_n)$ vérifiant $\lambda_0 + \cdots + \lambda_n = 1$ tel que A est le barycentre des points $(M_0, \cdots, M_n)$ affectés des coefficients $(\lambda_0, \cdots, \lambda_n)$; les réels $(\lambda_0, \cdots, \lambda_n)$ sont appelés les coordonnées barycentriques du point A dans ce repère : $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{M_0A}$ dans la base $(\overrightarrow{M_0M_1}, \cdots, \overrightarrow{M_0M_n})$ et $\lambda_0 = 1 - (\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)$.

3.7 Théorème

Une application affine d'un espace affine E de dimension finie n dans un espace affine F de dimension finie p est parfaitement déterminée par la donnée de ses valeurs en les points d'un repère barycentrique de E.

CHAPITRE II - ISOMÉTRIES PLANES

Dans ce chapitre, P désigne le plan affine euclidien : la distance entre deux points A et B de P est la norme euclidienne $\|\overrightarrow{AB}\|$ du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et sera notée simplement AB.

1. Structure des isométries

1.1 Définition

On appelle isométrie plane toute application f de P dans P qui conserve les distances :

$$\forall A,\ B \in P,\ f(A)f(B) = AB$$

on notera $Is(2)$ l'ensemble des isométries planes.

1.2 Exemple

Toute symétrie axiale est une isométrie ; en effet son application linéaire associée est une application orthogonale.

1.3 Proposition

La composée de deux isométries est une isométrie.

Preuve : immédiate.

$\square$

1.4 Théorème

Soient A,B et C trois points non alignés du plan P et A', B' et C' trois points du plan P tels que

$$AB = A'B',\ AC = A'C' \text{ et } BC = B'C'.$$

Alors il existe une isométrie f et une seule telle que $f(A) = A'$, $f(B) = B'$ et $f(C) = C'$. De plus f est la composée d'au plus trois symétries axiales donc est bijective.

Preuve :

Si $A = A'$, $B = B'$ et $C = C'$, alors $f = Id_P$ convient.

Sinon, par exemple on $A \neq A'$, considérons alors la médiatrice Δ_1 de A et A' et s_1 la symétrie axiale d'axe Δ_1 ; on a ainsi $s_1(A) = A'$ et on pose $s_1(B) = B_1$, $s_1(C) = C_1$. Si $B_1 = B'$ et $C_1 = C'$, alors $f = s_1$ convient.

Sinon, par exemple on a $B_1 \neq B'$ et de l'égalité $A'B' = AB = A'B_1$ on déduit que A' est sur la médiatrice Δ_2 de B' et B_1 ainsi, si s_2 désigne la symétrie axiale d'axe Δ_2, on a $s_2(A') = A'$, $s_2(B_1) = B'$ et on pose $s_2(C_1) = C_2$.

Si $C' = C_2$, alors la composée $f = s_2 \circ s_1$ convient. Sinon, on considère la médiatrice Δ_3 de C_2 et C' et on montre comme précédemment que A' et B' sont sur Δ_3, et alors la symétrie axiale s_3 d'axe Δ_3 vérifie $s_3(A') = A'$, $s_3(B') = B'$ et $s_3(C_2) = C'$, d'où $f = s_3 \circ s_2 \circ s_1$ convient. Remarquons que dans tous les cas l'isométrie f ainsi obtenue est bijective puisqu'une symétrie axiale l'est, et que f^{-1} est aussi composée de symétries axiales donc est également une isométrie.

S'il existe une autre isométrie g telle que $g(A) = A'$, $g(B) = B'$ et $g(C) = C'$, considérons l'isométrie $f^{-1} \circ g$: elle laisse fixes les points A, B et C. Si $f \neq g$, alors il existe un point M tel que $M' = f^{-1} \circ g(M) \neq M$ et ainsi on a $AM = AM'$, $BM = BM'$ et $CM = CM'$:

les points A, B et C sont alors sur la médiatrice de M et M' donc alignés, ce qui est impossible, donc $f = g$.

$\square$

1.5 Corollaire

Toute isométrie est la composée d'au plus trois symétries axiales ; toute isométrie est donc bijective et son inverse est une isométrie. De plus, toute isométrie est une application affine.

Preuve :

Il suffit de considérer trois points non alignés A, B et C et d'appliquer le théorème 1.4 aux points $A' = f(A)$, $B' = f(B)$ et $C' = f(C)$: alors par unicité f est la composée d'au plus trois symétries axiales, et par conséquent est une application affine.

$\square$

1.6 Proposition

Soit f une application affine de P dans P ; alors f est une isométrie si et seulement si son application linéaire associée $\overrightarrow{f}$ est un endomorphisme orthogonal du plan vectoriel euclidien $\overrightarrow{P}$.

Preuve :

Si f est une isométrie plane, alors pour tous points A et B de P, on a $f(A)f(B) = AB$, i.e $\|\overrightarrow{f(A)f(B)}\| = \|\overrightarrow{AB}\|$ ou encore $\|\overrightarrow{f}(\overrightarrow{AB})\| = \|\overrightarrow{AB}\|$, ainsi $\overrightarrow{f}$ est un endomorphisme orthogonal et réciproquement.

$\square$

1.7 Proposition

L'ensemble des isométries planes $(Is(2),\circ)$ est un groupe.

Preuve :

On a déjà vu que la loi $\circ$ est interne à $Is(2)$; de plus elle est associative, $Id \in Is(2)$ et est élément neutre, enfin toute isométrie f est bijective et f^{-1} est une isométrie : ainsi $(Is(2),\circ)$ est un groupe.

$\square$

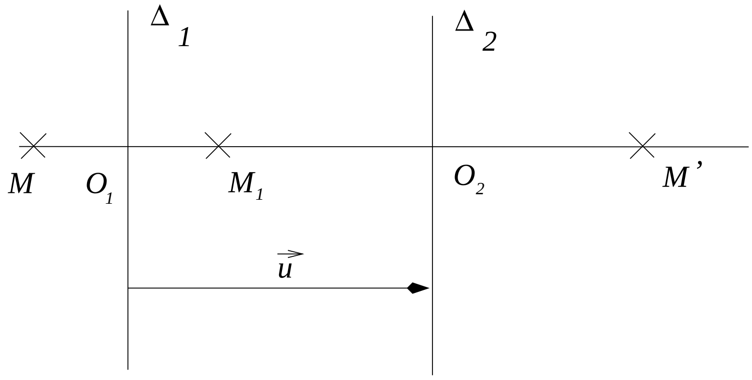
2 Classification des isométries

2.1 Composée de deux symétries axiales

Soient s_1 et s_2 deux symétries axiales d'axes Δ_1 et Δ_2 (distincts) respectivement.

$$M \overset{s_1}{\longmapsto} M_1 \overset{s_2}{\longmapsto} M'$$

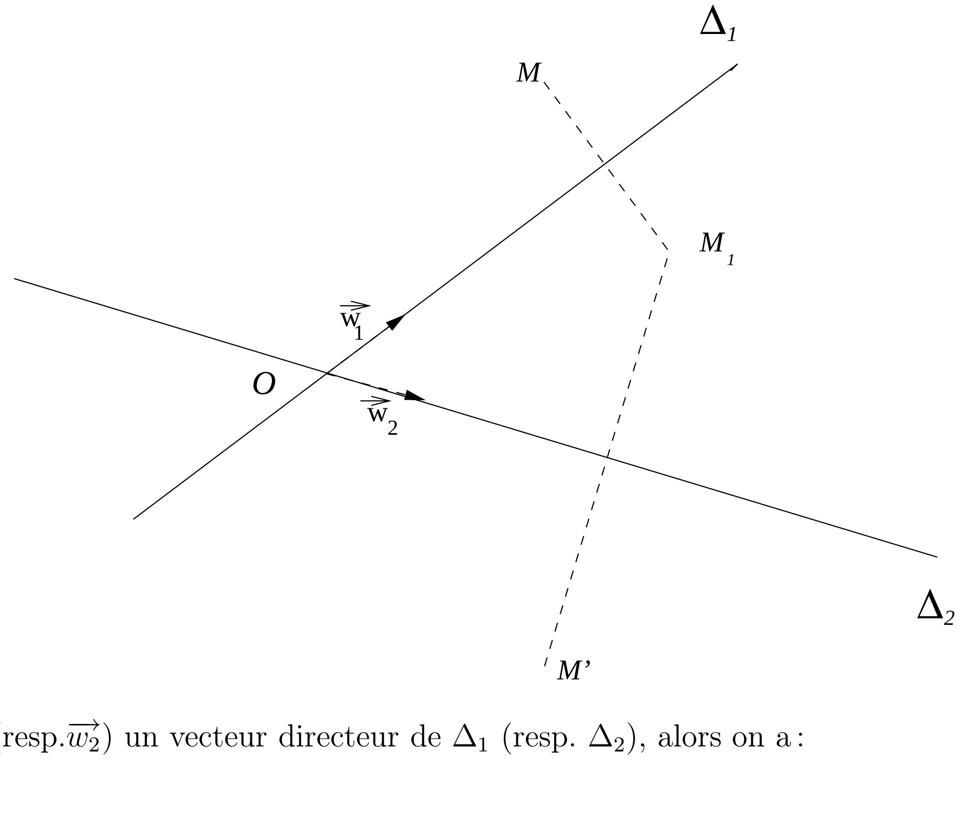
1er cas : $\Delta_1 // \Delta_2$



soit O_1 (resp. O_2) la projection orthogonale de M sur Δ_1 (resp. Δ_2), alors $\overrightarrow{MM_1} = 2\overrightarrow{O_1M_1}$ et $\overrightarrow{M_1M'} = 2\overrightarrow{M_1O_2}$, d'où $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{O_1O_2}$. Ainsi $s_2 \circ s_1$ est la translation de vecteur $2\overrightarrow{u}$ où $\overrightarrow{u}$ désigne "l'écart" entre la droite Δ_1 et la droite Δ_2.

Réciproquement, si $\overrightarrow{v}$ est un vecteur de $\overrightarrow{P}$, considérons Δ_1 une droite affine orthogonale à $\overrightarrow{v}$ et Δ_2 l'image de Δ_1 par la translation de vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{v}$: il est alors facile de voir que $s_2 \circ s_1$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{v}$.

2ème cas : $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \{O\}$



Soit $\overrightarrow{w_1}$ (resp.$\overrightarrow{w_2}$) un vecteur directeur de Δ_1 (resp. Δ_2), alors on a :

$$\begin{aligned}
(\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'}}) &= (\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{w_1}}) + (\widehat{\overrightarrow{w_1},\overrightarrow{OM_1}}) + (\widehat{\overrightarrow{OM_1},\overrightarrow{w_2}}) + (\widehat{\overrightarrow{w_2},\overrightarrow{OM'}}) \\
&= 2(\widehat{\overrightarrow{w_1},\overrightarrow{OM_1}}) + 2(\widehat{\overrightarrow{OM_1},\overrightarrow{w_2}}) \\
&= 2(\widehat{\overrightarrow{w_1},\overrightarrow{w_2}}) \\
&= 2(\widehat{\Delta_1,\Delta_2})
\end{aligned}$$

Ainsi $s_2 \circ s_1$ est la rotation de centre O, l'intersection de Δ_1 et Δ_2, et d'angle $2(\widehat{\Delta_1,\Delta_2})$.

Réciproquement, la rotation de centre O et d'angle α peut s'écrire sous la forme $s_2 \circ s_1$ où s_1 est la symétrie axiale d'axe Δ_1, Δ_1 étant une droite quelconque passant par O, et s_2 est la symétrie axiale d'axe Δ_2, Δ_2 étant la droite passant par O et telle que $(\widehat{\Delta_1,\Delta_2}) = \frac{1}{2}\alpha$.

2.2 Composée de trois symétries axiales

Soient s_1, s_2 et s_3 trois symétries axiales d'axes Δ_1, Δ_2 et Δ_3 (distincts deux à deux) respectivement et soit $f = s_3 \circ s_2 \circ s_1$.

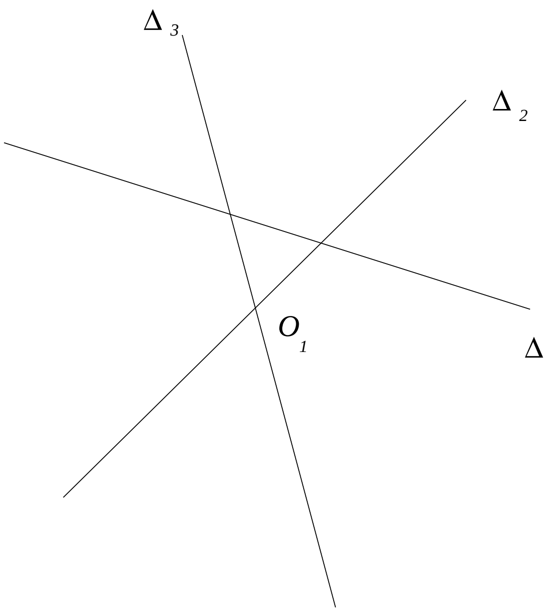
1er cas : $\Delta_1 // \Delta_2 // \Delta_3$.

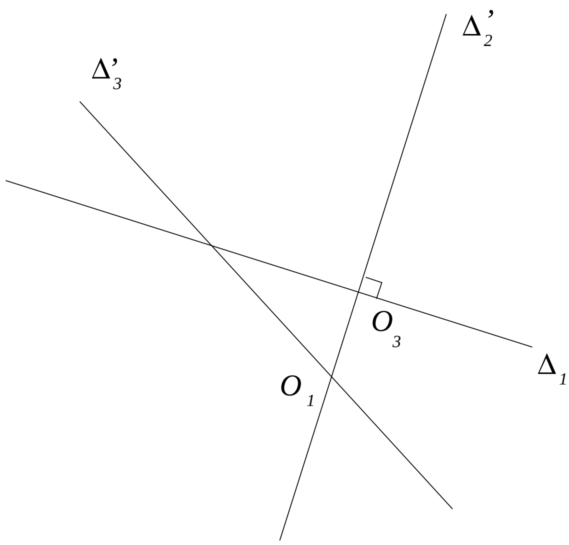
Dans ce cas $s_3 \circ s_2$ est une translation que l'on peut écrire sous la forme $s'_3 \circ s'_2$ où $\Delta'_2 = \Delta_1$ (puisque $\Delta_1 // \Delta_2$) et où Δ'_3 est une droite parallèle à Δ_3 choisie convenablement. On obtient alors $f = s'_3 \circ s_1 \circ s_1 = s'_3$ et ainsi f est une symétrie axiale d'axe parallèle à Δ_1, Δ_2 et Δ_3.

2ème cas : $\Delta_1 \cap \Delta_2 \cap \Delta_3 = \{O\}$.

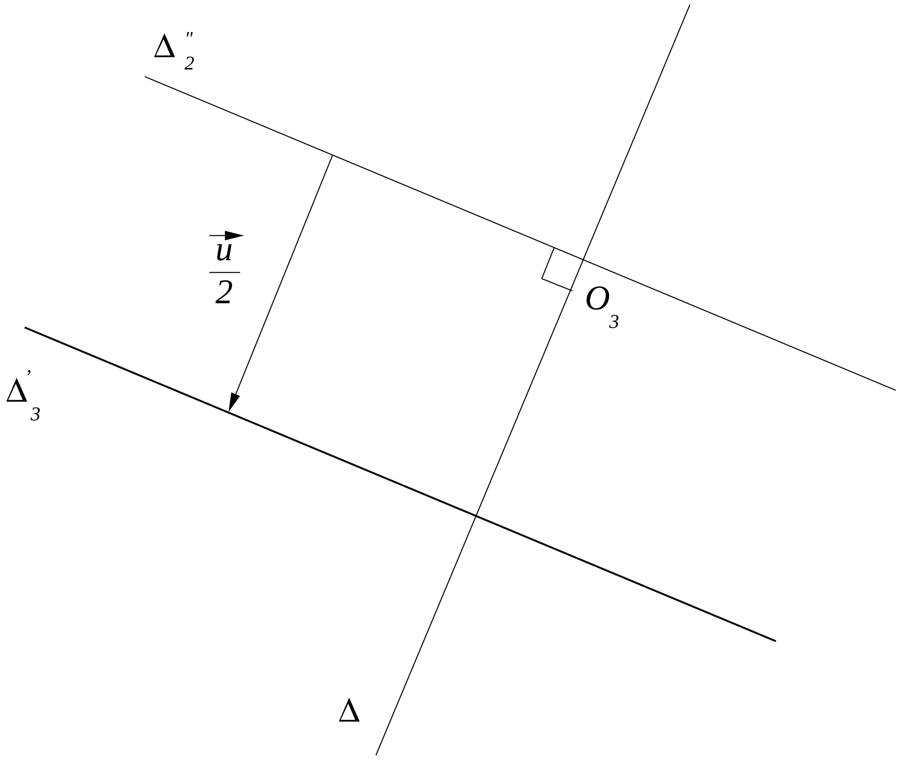
Dans ce cas $s_3 \circ s_2$ est une rotation de centre O que l'on peut écrire sous la forme $s'_3 \circ s'_2$ où $\Delta'_2 = \Delta_1$ (puisque Δ_1 passe par le point O) et où Δ'_3 est une droite passant par O choisie convenablement. On obtient alors $f = s'_3 \circ s_1 \circ s_1 = s'_3$ et ainsi f est une symétrie axiale.

3ème cas : Δ_1, Δ_2 et Δ_3 sont sécantes deux à deux en des points distincts.





Notons O_1 le point d'intersection de Δ_2 et Δ_3 ; alors $s_3 \circ s_2$ est une rotation de centre O_1 que l'on peut écrire sous la forme $s'_3 \circ s'_2$ où Δ'_2 est la droite passant par O_1 et orthogonale à Δ_1. Soit O_3 le point d'intersection de Δ_1 et Δ'_2, alors $s'_2 \circ s_1$ est une rotation de centre O_3 que l'on peut écrire sous la forme $s''_2 \circ s$ où Δ''_2 est la droite passant par O_3 et parallèle à Δ'_3. On obtient donc finalement $f = s'_3 \circ s''_2 \circ s$; or les droites Δ'_3 et Δ''_2 sont parallèles (et orthogonales à Δ) donc $s'_3 \circ s'_2$ est une translation de vecteur $\vec{u}$ orthogonal à Δ'_3, ainsi $f = t_{\vec{u}} \circ s$ où $\vec{u}$ est parallèle à l'axe Δ de la symétrie s.



On vérifie facilement que la droite Δ est la seule droite globalement invariante par f (car $\vec{u} \neq 0$) ; de plus pour tout point $M \in \Delta$, on a $\overrightarrow{Mf(M)} = \vec{u}$ donc la droite Δ et le vecteur $\vec{u}$ sont parfaitement déterminés par f. Ainsi f s'écrit de manière unique sous la forme $f = t_{\vec{u}} \circ s$ où $\vec{u}$ est parallèle à l'axe Δ de la symétrie s, de plus $t_{\vec{u}} \circ s = s \circ t_{\vec{u}}$: on dit que f est la symétrie glissante (ou symétrie-translation) d'axe Δ et de vecteur $\vec{u}$.

2.3 Définitions et proposition

a) On appelle déplacement toute isométrie f du plan telle que $\vec{f} \in O^+(\vec{P})$ i.e $\vec{f} \in O(\vec{P})$ et $\det(\vec{f}) = 1$, et on note $Is^+(2)$ l'ensemble des déplacements ; une isométrie f est un déplacement si et seulement si f est produit d'un nombre pair de symétries axiales, les éléments de $Is^+(2)$ sont donc les translations et les rotations. Tout déplacement conserve les angles de vecteurs et $Is^+(2)$ est un sous-groupe de $Is(2)$.

b) On appelle antidéplacement toute isométrie f du plan telle que $\vec{f} \in O^-(\vec{P})$ i.e $\vec{f} \in O(\vec{P})$ et $\det(\vec{f}) = -1$ et on note $Is^-(2)$ l'ensemble des antidéplacements , une isométrie f est un antidéplacement si et seulement si f est produit d'un nombre impair de symétries axiales, les éléments de $Is^-(2)$ sont donc les symétries axiales et les symétries glissantes. De plus tout antidéplacement f "renverse" les angles de vecteurs : pour tous $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\overrightarrow{P}$, on a

$$(\widehat{f(\vec{u}),f(\vec{v})}) = -(\widehat{\vec{u},\vec{v}}).$$

Preuve :

La preuve découle du fait que pour toute symétrie axiale s, on a $\det(\vec{s}) = -1$.

$\square$

2.4 Composée de deux déplacements

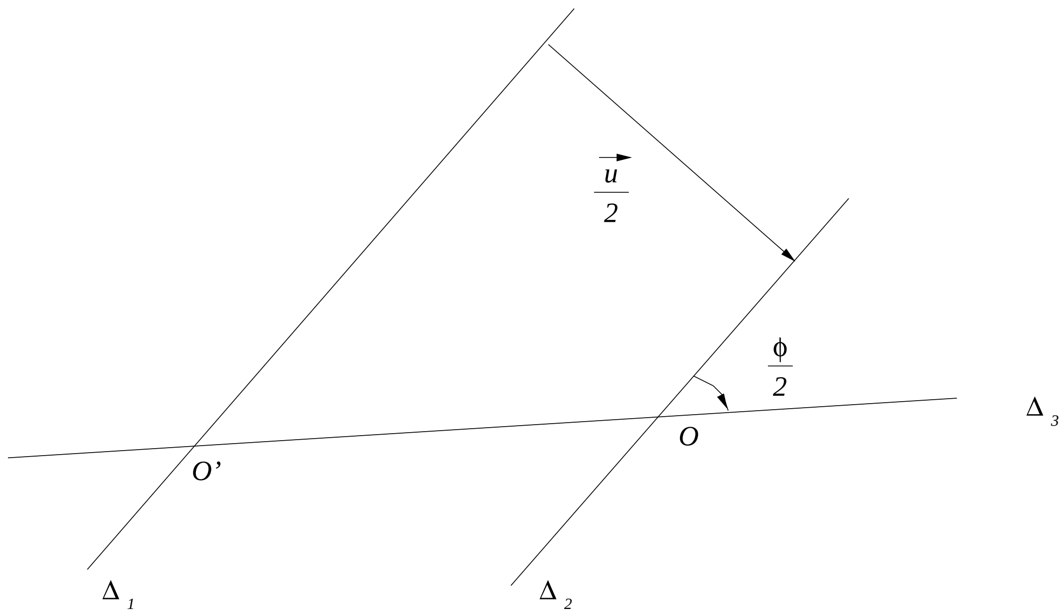
1er cas : composée de deux translations

$$t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{u}+\vec{v}} = t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}}.$$

2ème cas : composée d'une rotation et d'une translation

$$r(O,\varphi) \circ t_{\vec{u}} = r(O',\varphi)$$

en effet, on peut écrire la translation $t_{\vec{u}} = s_2 \circ s_1$ et la rotation $r(O,\varphi) = s_3 \circ s_2$ en prenant pour axe de la symétrie s_2 la droite Δ_2 passant par le point O et orthogonale au vecteur $\vec{u}$, pour axe de la symétrie s_1 la droite Δ_1 parallèle à Δ_2, image de Δ_2 par la translation de vecteur $-\frac{1}{2}\vec{u}$ et pour axe de la symétrie s_3 la droite Δ_3 passant par O et telle que l'angle $\widehat{(\Delta_2,\Delta_3)} = \frac{1}{2}\varphi$.



Alors, on obtient $r(O,\varphi) \circ t_{\vec{u}} = s_3 \circ s_2 \circ s_2 \circ s_1 = s_3 \circ s_1 = r(O',\varphi)$ où O' est le point intersection de Δ_1 et Δ_3.

3ème cas : composée de deux rotations de même centre

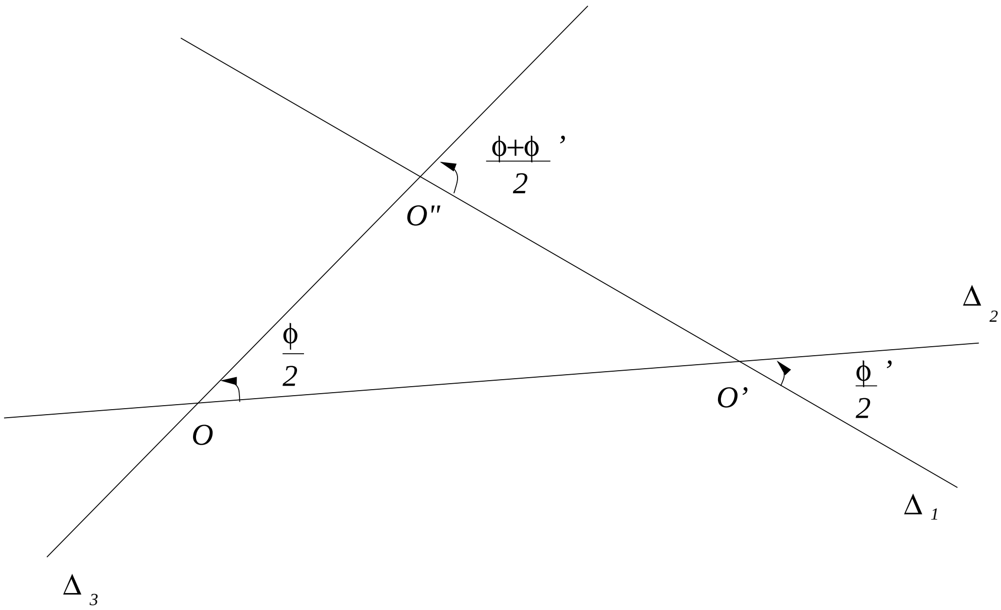
$$r(O,\varphi) \circ r(O,\varphi') = r(O,\varphi + \varphi') = r(O,\varphi') \circ r(O,\varphi).$$

4ème cas : composée de deux rotations de centres distincts

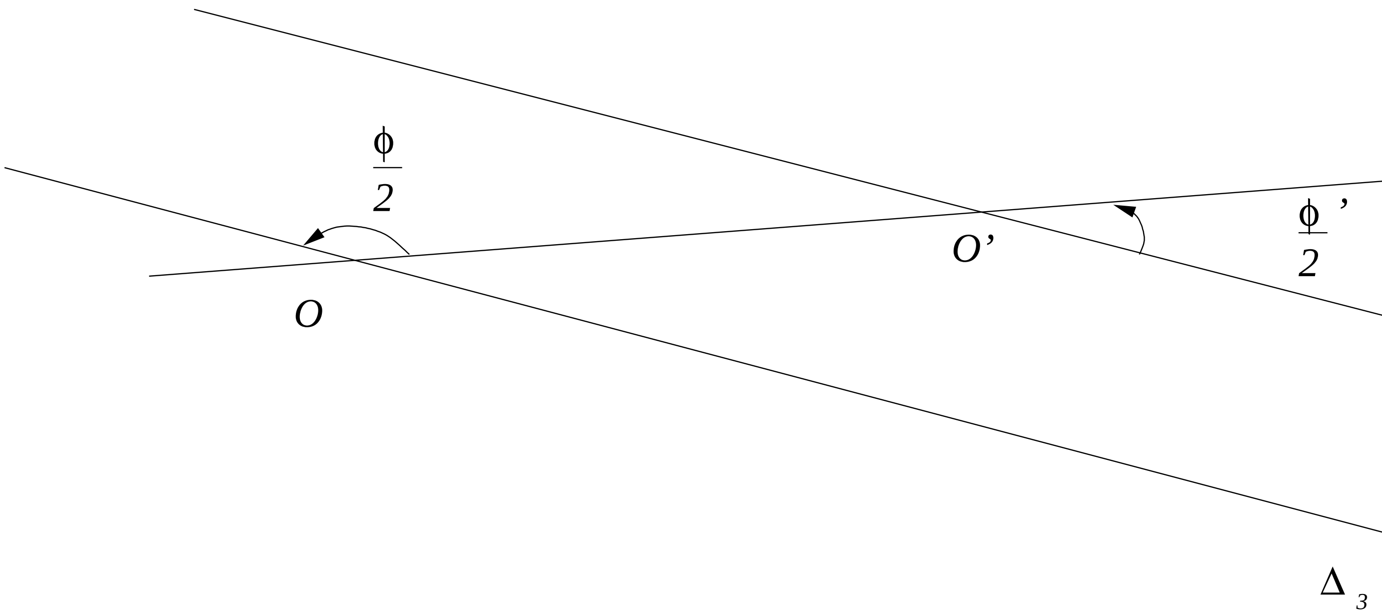
$$r(O,\varphi) \circ r(O',\varphi')$$

* si $\varphi + \varphi' \neq \widehat{0}$, la composée $r(O,\varphi) \circ r(O',\varphi')$ est une rotation d'angle $\varphi + \varphi'$, en effet on peut écrire $r(O',\varphi') = s_2 \circ s_1$ et $r(O,\varphi) = s_3 \circ s_2$ en prenant pour axe de la symétrie s_2 la droite $\Delta_2 = (OO')$, pour axe de la symétrie s_1 la droite Δ_1 passant par le point O' et telle que l'angle $\widehat{(\Delta_1,\Delta_2)} = \frac{1}{2}\varphi'$ et pour axe de la symétrie s_3 la droite Δ_3 passant par le point O et telle que l'angle $\widehat{(\Delta_2,\Delta_3)} = \frac{1}{2}\varphi$.

Alors, on obtient $r(O,\varphi) \circ r(O',\varphi) = s_3 \circ s_2 \circ s_2 \circ s_1 = s_3 \circ s_1 = r(O'',\varphi + \varphi')$ où O'' est le point d'intersection des droites Δ_1 et Δ_3.



* si $\varphi + \varphi' = \widehat{0}$, par un calcul analogue, $r(O,\varphi) \circ r(O',\varphi) = s_3 \circ s_2 \circ s_2 \circ s_1 = s_3 \circ s_1 = t_{\vec{u}}$ car les deux droites Δ_1 et Δ_3 sont parallèles puisque $\varphi + \varphi' = \widehat{0}$.



3 Etude pratique des isométries planes

3.1 Proposition

Considérons un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan P et soit f une application affine de P dans P qui s'écrit dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ de la manière suivante

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

avec A la matrice de $\overrightarrow{f}$ dans la base orthonormée $(\vec{i},\vec{j})$.

Alors f est une isométrie plane si et seulement si $\overrightarrow{f}$ est un endomorphisme orthogonal de $\overrightarrow{P}$, i.e si et seulement si A est une matrice orthogonale puisque la base $(\vec{i},\vec{j})$ est orthonormée ; si ${}^tAA = I$, f est donc une isométrie plane.

1er cas : $A = I$, alors f est la translation de vecteur $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$.

2ème cas : $\det A = 1$ et $A \neq I$, alors A est de la forme

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \qquad \text{où } \varphi \text{ est défini } mod(2\pi) \text{ et } \varphi \not\equiv 0$$

et $\overrightarrow{f}$ est la rotation vectorielle de mesure $\varphi\ mod(2\pi)$; ainsi f est une rotation affine de mesure $\varphi\ mod(2\pi)$ et de centre l'unique point fixe de f.

3ème cas : $\det A = -1$, alors A est de la forme

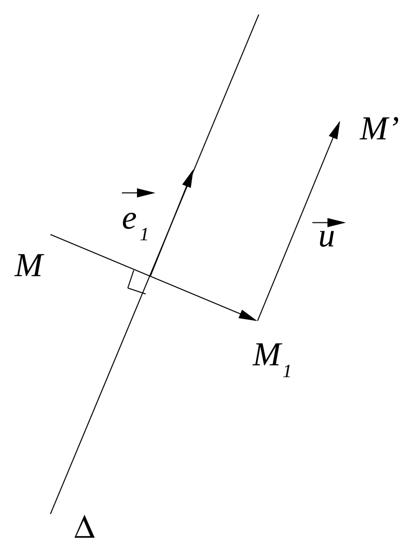
$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix} \qquad \text{où } \varphi \text{ est défini } mod(2\pi)$$

et $\overrightarrow{f}$ est la symétrie orthogonale par rapport à la droite vectorielle $\overrightarrow{\Delta} = \ker(A - I)$ dirigée par le vecteur unitaire $\vec{e_1} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi/2) \\ \sin(\varphi/2) \end{pmatrix}$; ainsi f est une symétrie glissante d'axe Δ dirigé par $\vec{e_1}$ et de vecteur $\vec{u} = \lambda\vec{e_1}$:

$$f : M \xmapsto{s_\Delta} M_1 \xmapsto{t_{\vec{u}}} M'$$

on a alors pour tout point M de P,

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1M'}$$



d'où
$$\langle\overrightarrow{MM'}|\vec{e_1}\rangle = \langle\overrightarrow{MM_1}|\vec{e_1}\rangle + \langle\overrightarrow{M_1M'}|\vec{e_1}\rangle$$
or $\langle\overrightarrow{MM_1}|\vec{e_1}\rangle = 0$ puisque $\overrightarrow{MM_1}$ est orthogonal à Δ et $\langle\overrightarrow{M_1M'}|\vec{e_1}\rangle = \langle\vec{u}|\vec{e_1}\rangle = \langle\lambda\vec{e_1}|\vec{e_1}\rangle = \lambda$, d'où en particulier pour le point O
$$\lambda = \langle\overrightarrow{Of(O)}|\vec{e_1}\rangle = \langle\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} | \begin{pmatrix} \cos(\varphi/2) \\ \sin(\varphi/2) \end{pmatrix}\rangle.$$
On obtient ainsi le vecteur $\vec{u} = \lambda\vec{e_1}$ (si $\lambda = 0$, alors f est la symétrie axiale d'axe Δ).

D'autre part, on remarque que la restriction de f à l'axe Δ n'est autre que la translation $t_{\vec{u}}$; il suffit donc pour déterminer Δ de résoudre l'équation
$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \vec{u}.$$

3.2 Exemples

a) Soit f l'application affine de P dans P qui s'écrit dans le repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ de la manière suivante
$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
La matrice $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$ vérifie ${}^tAA = I$ donc f est une isométrie.

De plus $\det(A) = 1$ donc f est une rotation affine qui a pour centre l'unique point fixe Ω de f et pour mesure $\varphi\ mod(2\pi)$ défini par $\cos\varphi = \frac{1}{2}$ et $\sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$, i.e $\varphi \equiv \frac{\pi}{3}\ mod(2\pi)$; on détermine le point Ω en résolvant l'équation $f(M) = M$ et on trouve
$$\Omega = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -3 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

b) Soit f l'application affine de P dans P qui s'écrit dans le repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ de la manière suivante
$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
La matrice $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$ vérifie ${}^tAA = I$ donc f est une isométrie.

De plus $\det(A) = -1$ donc f est une symétrie glissante d'axe Δ dirigé par un vecteur unitaire $\vec{e_1}$ base de $\ker(\mathcal{A} - I)$ et de vecteur $\vec{u} = \lambda\vec{e_1}$; le calcul donne
$$\vec{e_1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$
et
$$\lambda = \langle\overrightarrow{Of(O)}|\vec{e_1}\rangle = \langle\begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} | \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
donc
$$\vec{u} = \frac{\sqrt{3}}{4}\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

CHAPITRE III - SIMILITUDES

Dans ce chapitre, P désigne le plan affine euclidien ; la distance entre deux points A et B de P est la norme euclidienne $\|\overrightarrow{AB}\|$ du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et sera notée simplement AB.

1. Généralités

1.1 Définition

Soit r un réel > 0 ; on appelle similitude de rapport r toute application f de P dans P vérifiant

$$\forall A,\, B \in P,\ f(A)f(B) = rAB$$

on notera $\mathcal{S}$ l'ensemble des similitudes.

1.2 Proposition

Soit f une similitude de rapport r ; on considère O un point de P et h l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{r}$, alors $h \circ f$ est une isométrie. Donc $f = h^{-1} \circ (h \circ f)$ est une application affine bijective.

Preuve : en effet, pour tous points A et B de P, on a

$$h \circ f(A) h \circ f(B) = \|\overrightarrow{h(f(A))h(f(B))}\| = \|\frac{1}{r}\overrightarrow{f(A)f(B)}\| = \frac{1}{r} f(A)f(B) = \frac{1}{r} rAB = AB.$$

□

1.3 Proposition

L'ensemble des similitudes planes $(\mathcal{S},\circ)$ est un sous-groupe du groupe $\mathcal{A}$ des applications affines bijectives et $Is(2)$ est un sous groupe de $\mathcal{S}$.

Preuve :

D'après 1.2, $\mathcal{S}$ est contenu dans $\mathcal{A}$ et $\mathcal{S}$ contient $Is(2)$ de manière évidente (les isométries sont les similitudes de rapport 1) ; montrons que $\mathcal{S}$ est un sous-groupe de $\mathcal{A}$: considérons deux similitudes f et g de rapports respectifs r et r', alors pour tous points A et B de P on a

$$f \circ g(A) f \circ g(B) = r g(A)g(B) = rr'AB$$

donc $f \circ g$ est une similitude (de rapport rr').

D'autre part, si f est une similitude de rapport r, on vérifie facilement que f^{-1} est une similitude de rapport $\frac{1}{r}$.

□

1.4 Proposition et définition

Soit f une similitude de rapport r et soient O_1 et O_2 deux points de P ; notons h_1 (resp. h_2) l'homothétie de rapport $\frac{1}{r}$ et de centre O_1 (resp. O_2) et considérons les isométries $f_1 = h_1 \circ f$, $f_2 = h_2 \circ f$ et $f_3 = f \circ h_1$, alors on a

$$\vec{f_1} = \vec{f_2} = \vec{f_3}.$$

Cet endomorphisme orthogonal ne dépend donc que de f.

Si $\vec{f_1} = \vec{f_2} = \vec{f_3}$ est un déplacement, on dira que la similitude f est directe et si $\vec{f_1} = \vec{f_2} = \vec{f_3}$ est un antidéplacement, on dira que la similitude f est indirecte.

Ainsi, si f est une similitude directe de rapport r, l'endomorphisme orthogonal $\vec{f_1} = \vec{f_2} = \vec{f_3}$ est une rotation vectorielle d'angle α et on a alors :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} (\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{f(A)f(B)}}) & = & \alpha \\ f(A)f(B) & = & rAB \end{array} \right.$$

on dit que α est l'angle de la similitude f.

On notera $\mathcal{S}^+$ l'ensemble des similitudes directes.

1.5 Proposition

L'ensemble des similitudes directes $\mathcal{S}^+$ est un sous-groupe de $\mathcal{S}$.

Preuve : c'est une conséquence immédiate de la définition d'une similitude directe puisque $O^+(\overrightarrow{P})$ est un sous-groupe de $O(\overrightarrow{P})$.

$\square$

1.6 Proposition

a) Une similitude directe conserve les angles de vecteurs et de droites ; une similitude indirecte renverse les angles de vecteurs et de droites.

b) Dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ une similitude directe f de rapport r s'écrit sous la forme

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ avec } a^2 + b^2 = r^2$$

et une similitude indirecte g de rapport r s'écrit sous la forme

$$g : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ avec } a^2 + b^2 = r^2$$

Preuve : c'est une conséquence immédiate de 1.4.

$\square$

2 Utilisation des nombres complexes

On choisit un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan affine euclidien P et on associe à tout point M de coordonnées (x,y) dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ son affixe $z = x + iy$: on réalise ainsi une bijection entre le plan P et le corps $\mathbb{C}$. On obtient alors une écriture très simple des similitudes :

2.1 Proposition

a) Soit f une similitude directe ; alors il existe un unique $a \in \mathbb{C}^*$ et un unique $b \in \mathbb{C}$ tels que

$$\forall z \in \mathbb{C},\ f(z) = az + b$$

b) Soit f une similitude indirecte ; alors il existe un unique $a \in \mathbb{C}^*$ et un unique $b \in \mathbb{C}$ tels que

$$\forall z \in \mathbb{C},\ f(z) = a\bar{z} + b$$

De plus, dans les deux cas, $|a|$ est le rapport de la similitude.

Preuve :

a) D'après 1.3, on a pour tout point M de P

$$\overrightarrow{f(O)f(M)} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{OM}) = r\overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{OM})$$

où $\overrightarrow{\varphi}$ est une rotation vectorielle d'angle de mesure α ; ainsi on a

$$\overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{OM}) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

donc

$$f(M) = f(O) + \begin{pmatrix} xr\cos\alpha - yr\sin\alpha \\ xr\sin\alpha + yr\cos\alpha \end{pmatrix}$$

ainsi en posant $a = re^{i\alpha}$ et en notant b l'affixe du point $f(O)$, on obtient par passage aux affixes

$$f(z) = az + b.$$

b) Si f est une similitude indirecte, on a une écriture du même type

$$\overrightarrow{f(O)f(M)} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{OM}) = r\overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{OM})$$

où $\overrightarrow{\varphi}$ est une symétrie orthogonale par rapport à une droite $\overrightarrow{\Delta}$ donc

$$\overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{OM}) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

où $\alpha = 2mes(\widehat{\vec{i},\overrightarrow{\Delta}})$ et ainsi, en posant $a = re^{i\alpha}$ et en notant b l'affixe du point $f(O)$, on obtient

$$f(z) = a\bar{z} + b.$$

□

2.2 Proposition

a) Une similitude directe qui n'est pas une translation admet un unique point fixe appelé centre de la similitude directe.

b) Une similitude indirecte qui n'est pas une symétrie glissante admet un unique point fixe appelé centre de la similitude indirecte.

Preuve :

a) Soit f une similitude directe, alors elle s'écrit sous la forme $f(z) = az + b$ où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$; l'équation $f(z) = z$ possède alors une unique solution $z = \dfrac{b}{1-a}$ si et seulement si $a \neq 1$. Si $a = 1$, on a $f(z) = z + b$ et ainsi f est la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe b ; par conséquent f n'admet aucun point fixe si $b \neq 0$ et une infinité si $b = 0$.

b) Soit f une similitude indirecte, alors elle s'écrit sous la forme $f(z) = a\bar{z} + b$ où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$; alors

$$fz) = z \Longleftrightarrow a\bar{z} + b = z \Longleftrightarrow \bar{a}z + \bar{b} = \bar{z}$$

d'où

$$fz) = z \Longleftrightarrow a(\bar{a}z + \bar{b}) + b = z \Longleftrightarrow z(1 - |a|^2) = b + a\bar{b}$$

donc f admet un unique point fixe $z = \dfrac{b + a\bar{b}}{1 - |a|^2}$ si et seulement si $|a| \neq 1$. Si $|a| = 1$, alors a s'écrit $a = e^{i\alpha}$ et ainsi l'application $g \ : \ z \longmapsto az$ n'est autre que la rotation de centre O et d'angle de mesure α donc peut s'écrire sous la forme $g = s_\Delta \circ s_D$ où D désigne l'axe réel ; or l'application $z \longmapsto \bar{z}$ n'est autre que s_D et l'application $z \longmapsto b$ est la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe b, d'où

$$f = t_{\vec{u}} \circ g \circ s_D = t_{\vec{u}} \circ s_\Delta \circ s_D \circ s_D = t_{\vec{u}} \circ s_\Delta$$

et f est une symétrie glissante qui n'admet aucun point fixe si $b \neq 0$ et une infinité si $b = 0$.

□

2.3 Proposition

Soient A, B, A' et B' des points de P tels que $A \neq B$ et $A' \neq B'$; alors il existe une unique similitude directe (resp. une unique similitude indirecte) f telle que $f(A) = A'$ et $f(B) = B'$.

Preuve :

Notons z_A, z_B, $z_{A'}$ et $z_{B'}$ les affixes respectifs des points A, B, A' et B' ; on cherche alors s'il existe des nombres complexes a et b tels que

$$\begin{cases} az_A + b &= z_{A'} \\ az_B + b &= z_{B'} \end{cases}$$

comme $z_A \neq z_B$ et $z_{A'} \neq z_{B'}$ ce système possède une unique solution donnée par $a = \dfrac{z_{A'} - z_{B'}}{z_A - z_B} \neq 0$ et $b = \dfrac{z_A z_{B'} - z_{A'} z_B}{z_A - z_B}$: il existe donc une unique similitude directe f telle que $f(A) = A'$ et $f(B) = B'$.
De même, on démontre qu'il existe une unique similitude indirecte g telle que $g(A) = A'$ et $g(B) = B'$.

□

3 Triangles semblables

3.1 Définition

Soient A, B et C (resp. A', B' et C') des points distincts deux à deux du plan ; on dit que les deux triangles ABC et $A'B'C'$ sont semblables si et seulement si il existe une similitude f telle que $f(A) = A'$, $f(B) = B'$ et $f(C) = C'$; si f est directe (resp. indirecte) ABC et $A'B'C'$ sont dits directement semblables (resp. indirectement semblables).

3.2 Théorème

a) Deux triangles ABC et $A'B'C'$ sont semblables si et seulement si

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$$

b) Deux triangles ABC et $A'B'C'$ sont directement semblables si et seulement si ils vérifient l'une des deux conditions équivalentes suivantes

b_1) $\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{A'C'}{AC}$ et $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) = (\widehat{\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{A'C'}})$

b_2) $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) = (\widehat{\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{A'C'}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}}) = (\widehat{\overrightarrow{B'A'},\overrightarrow{B'C'}})$

c) Deux triangles ABC et $A'B'C'$ sont indirectement semblables si et seulement si ils vérifient l'une des deux conditions équivalentes suivantes

c_1) $\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{A'C'}{AC}$ et $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) = -(\widehat{\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{A'C'}})$

c_2) $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) = -(\widehat{\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{A'C'}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}}) = -(\widehat{\overrightarrow{B'A'},\overrightarrow{B'C'}})$.

Preuve :

a) Si ABC et $A'B'C'$ sont semblables, alors par définition il existe une similitude f de rapport r telle que $f(A) = A'$,$f(B) = B'$ et $f(C) = C'$, d'où

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = r.$$

Réciproquement si on a

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = r$$

alors, d'après 2.3, il existe une unique similitude directe f (dont le rapport est r) vérifiant $f(A) = A'$ et $f(B) = B'$. Si $f(C) = C'$ les deux triangles ABC et $A'B'C'$ sont directement semblables, sinon on a $A'C' = rAC = f(A)f(C) = A'f(C)$ et de même $B'C' = B'f(C)$, donc la droite $(A'B')$ n'est autre que la médiatrice du segment $[C',f(C)]$; ainsi la symétrie axiale s d'axe $(A'B')$ laisse fixes les points A' et B' et envoie $f(C)$ sur C', donc $g = s \circ f$ est une similitude indirecte qui vérifie $g(A) = A'$, $g(B) = B'$ et $g(C) = C'$, les deux triangles ABC et $A'B'C'$ sont donc indirectement semblables.

b) Si ABC et $A'B'C'$ sont directement semblables, alors par définition il existe une similitude directe f de rapport r et d'angle α telle que $f(A) = A'$,$f(B) = B'$ et $f(C) = C'$, d'où

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = r$$

et

$$(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A'B'}}) = (\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{A'C'}}) = \alpha$$

d'où

$$(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) = (\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A'B'}}) + (\widehat{\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{A'C'}}) + (\widehat{\overrightarrow{A'C'},\overrightarrow{AC}}) = \alpha + (\widehat{\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{A'C'}}) - \alpha = (\widehat{\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{A'C'}}).$$

Réciproquement si on a

$$r = \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} \text{ et } (\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) = (\widehat{\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{A'C'}})$$

alors, d'après 2.3 il existe une unique similitude directe f de rapport r telle que $f(A) = A'$ et $f(B) = B'$: supposons $f(C) \neq C'$, alors d'après a) la similitude $g = s \circ f$ où s désigne la symétrie axiale d'axe $(A'B')$ est une similitude indirecte qui vérifie $g(A) = A'$, $g(B) = B'$ et $g(C) = C'$, d'où $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) = -(\widehat{\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{A'C'}})$ d'après 1.6 puisque g est indirecte, d'où $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) = (\widehat{\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{A'C'}}) = \widehat{0}$ et ainsi les points A', B' et C' sont alignés i.e C' appartient à la droite $(A'B')$; on en déduit que $C' = s(C') = s \circ g(C) = s \circ s \circ f(C) = f(C)$ ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc $f(C) = C'$ et ABC et $A'B'C'$ sont directement semblables.

L'équivalence $b_1) \iff b_2)$ découle des relations dans le triangle.

La démonstration de c) est analogue à celle de b).

□

3.3 Théorème

a) Deux similitudes directes de même centre commutent.

b) Si les triangles OAB et $OA'B'$ sont directement semblables, alors les triangles OAA' et OBB' sont directement semblables.

Preuve :

a) Soient f_1 et f_2 deux similitudes directes de même centre O, alors si on choisit O comme centre d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, les similitudes f_1 et f_2 s'écrivent sous la forme $f_1(z) = a_1 z$ et $f_2(z) = a_2 z$ où a_1 et a_2 sont des nombres complexes non nuls. D'où

$$\forall z \in \mathbb{C},\ f_1 \circ f_2(z) = f_1(a_2 z) = a_1 a_2 z = a_2 a_1 z = f_2(a_1 z) = f_2 \circ f_1(z).$$

b) Si les triangles OAB et $OA'B'$ sont directement semblables, alors il existe une similitude directe f telle que $f(O) = O$, $f(A) = A'$ et $f(B) = B'$; considérons alors l'unique similitude directe g telle que $g(O) = O$ et $g(A) = B$: comme f et g ont même centre O, elles commutent et on a ainsi $g(A') = g(f(A)) = f(g(A)) = f(B) = B'$, donc OAA' et OBB' sont directement semblables.

□

CHAPITRE IV - ISOMÉTRIES DE L'ESPACE

Dans ce chapitre, E désigne l'espace affine euclidien de dimension 3 ; la distance entre deux points A et B de E est la norme euclidienne $\|\overrightarrow{AB}\|$ du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et sera notée simplement AB.

1. Droites et plans de l'espace

1.1 Rappels

$*$ Soient Δ_1 et Δ_2 deux droites distinctes de E de vecteurs directeurs respectifs $\vec{e_1}$ et $\vec{e_2}$; si $\vec{e_1}$ est colinéaire à $\vec{e_2}$, alors Δ_1 et Δ_2 sont parallèles donc coplanaires ; si $\vec{e_1}$ n'est pas colinéaire à $\vec{e_2}$, alors soit $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \emptyset$ et Δ_1 et Δ_2 ne sont pas coplanaires, soit $\Delta_1 \cap \Delta_2$ est réduit à un point et Δ_1 et Δ_2 sont concourrantes donc coplanaires.

$*$ Soient P_1 et P_2 deux plans distincts de E ; si $\overrightarrow{P_1} = \overrightarrow{P_2}$ alors P_1 et P_2 sont parallèles et $P_1 \cap P_2 = \emptyset$; si $\overrightarrow{P_1} \neq \overrightarrow{P_2}$, alors $P_1 \cap P_2$ est une droite.

$*$ Soient Δ une droite de vecteur directeur $\vec{e}$ et P un plan de E, alors on a les cas suivants :

1er cas : $\vec{e} \in \overrightarrow{P}$, alors soit $\Delta \subset P$, soit $\Delta \cap P = \emptyset$: dans ce cas on dit que Δ est parallèle à P ; on voit facilement que ce cas se produit si et seulement si Δ est parallèle à une droite Δ' contenue dans P.

2ème cas : $\vec{e} \notin \overrightarrow{P}$, alors $\Delta \cap P$ est réduit à un point.

$*$ Soient Δ_1 et Δ_2 deux droites distinctes de E de vecteurs directeurs respectifs $\vec{e_1}$ et $\vec{e_2}$: si $\vec{e_1}$ est orthogonal à $\vec{e_2}$, on dit que les deux droites Δ_1 et Δ_2 sont orthogonales ; si de plus Δ_1 et Δ_2 sont concourrantes, on dit que Δ_1 et Δ_2 sont perpendiculaires.

$*$ Soient Δ une droite de vecteur directeur $\vec{e}$ et P un plan de E ; si $\vec{e}$ est orthogonal à tout vecteur de $\overrightarrow{P}$, on dit que Δ est orthogonale au plan P : $\Delta \cap P$ est alors réduit à un point et Δ est orthogonale à toute droite contenue dans P.

$*$ Soient P_1 et P_2 deux plans distincts de E ; s'il existe un vecteur $\vec{u}_1 \in \overrightarrow{P_1}$ tel que $\vec{u}_1$ soit orthogonal à tout vecteur de $\overrightarrow{P_2}$, on dit que P_1 et P_2 sont orthogonaux. Si $\Delta = P_1 \cap P_2$, pour tout plan P_3 orthogonal à Δ, $P_1 \cap P_3$ et $P_2 \cap P_3$ sont des droites perpendiculaires.

$*$ Soient P_1 et P_2 deux plans distincts de E sécants selon une droite Δ ; alors pour tout plan P_3 orthogonal à Δ, les droites $P_1 \cap P_3$ et $P_2 \cap P_3$ sont concourrantes et l'angle entre ces droites est indépendant du choix du plan P_3 : on l'appelle l'angle entre les plans P_1 et P_2.

2. Structure des isométries

2.1 Définition

On appelle isométrie de E toute application f de E dans E qui conserve les distances :

$$\forall A,\, B \in P,\, f(A)f(B) = AB$$

on notera $Is(3)$ l'ensemble des isométries de E.

2.2 Exemples

a) Soit P un plan de E, alors la réflexion de plan P est une isométrie : en effet son application linéaire associée est une application orthogonale.

b) Soit Δ une droite de E, alors la symétrie orthogonale par rapport à la droite Δ est une isométrie : on l'appelle le retournement de droite Δ.

2.3 Théorème

Soient A,B, C et D quatre points non coplanaires de E et A', B', C' et D' quatre points de E tels que

$AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $BC = B'C'$, $AD = A'D'$, $BC = B'C'$, $BD = B'D'$ et $CD = C'D'$.

Alors il existe une isométrie f et une seule telle que $f(A) = A'$, $f(B) = B'$, $f(C) = C'$ et $f(D) = D'$. De plus f est la composée d'au plus quatre réflexions donc est bijective.

Preuve : analogue à celle faite pour les isométries planes en considérant les réflexions par rapport aux plans médiateurs de couples de points.

□

2.4 Corollaire

Toute isométrie de E est la composée d'au plus quatre réflexions ; toute isométrie est donc bijective et son inverse est une isométrie. De plus, toute isométrie est une application affine.

2.5 Proposition

L'ensemble des isométries ($Is(3)$,$\circ$) est un groupe.

Preuve : analogue à celle faite pour $Is(2)$.

□

2.6 Proposition et définitions

Soit f une application affine de E dans E ; alors f est une isométrie si et seulement si son application linéaire associée $\overrightarrow{f}$ est un endomorphisme orthogonal de l'espace vectoriel euclidien $\overrightarrow{E}$.

Si $\vec{f} \in \mathcal{O}^+(\overrightarrow{E})$, on dit que f est un déplacement et on note $Is^+(3)$ l'ensemble des déplacements ; une isométrie f est donc un déplacement si et seulement si f est produit d'un nombre pair de réflexions.

Si $\vec{f} \in \mathcal{O}^-(\overrightarrow{E})$, on dit que f est un antidéplacement et on note $Is^-(3)$ l'ensemble des antidéplacements ; une isométrie f est donc un antidéplacement si et seulement si f est produit d'un nombre impair de réflexions.

L'ensemble des déplacements $Is^+(3)$ est un sous-groupe de $Is(3)$.

Preuve : immédiate.

□

2.7 Théorème

Soit f un déplacement de E, alors $\vec{f} \in \mathcal{O}^+(\overrightarrow{E})$ donc $\vec{f} = Id_{\overrightarrow{E}}$ ou $\vec{f}$ est une rotation vectorielle d'axe la droite $\overrightarrow{\Delta} = \ker(\vec{f} - Id_{\overrightarrow{E}})$ orientée par le choix d'un vecteur directeur unitaire $\vec{e}_1$ et d'angle de mesure $\varphi \not\equiv 0[2\pi]$ mesuré dans le plan $\overrightarrow{P} = \overrightarrow{\Delta}^{\perp}$ orienté par le choix de $\vec{e}_1$:

1er cas : $\vec{f} = Id_{\overrightarrow{E}}$, alors f est la translation de vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{Mf(M)}$ pour tout point M de E.

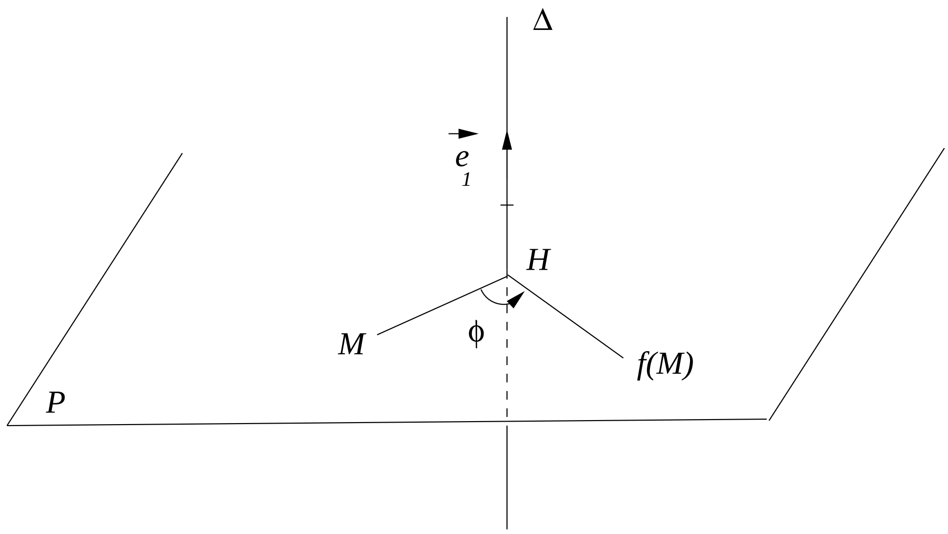
2ème cas : $\vec{f}$ est une rotation vectorielle d'axe $\overrightarrow{\Delta}$ et d'angle de mesure $\varphi \not\equiv 0[2\pi]$, alors on a :

$*$ si f possède au moins un point fixe, l'ensemble des points fixes de f est une droite affine Δ de direction $\overrightarrow{\Delta}$ et f est définie de la manière suivante :

pour tout point M de E, si H désigne la projection orthogonale de M sur la droite Δ et si P désigne le plan contenant M et orthogonal à Δ, $f(M)$ est l'unique point de P vérifiant

$$HM = Hf(M) \text{ et } mes(\widehat{\overrightarrow{HM},\overrightarrow{Hf(M)}}) = \varphi$$

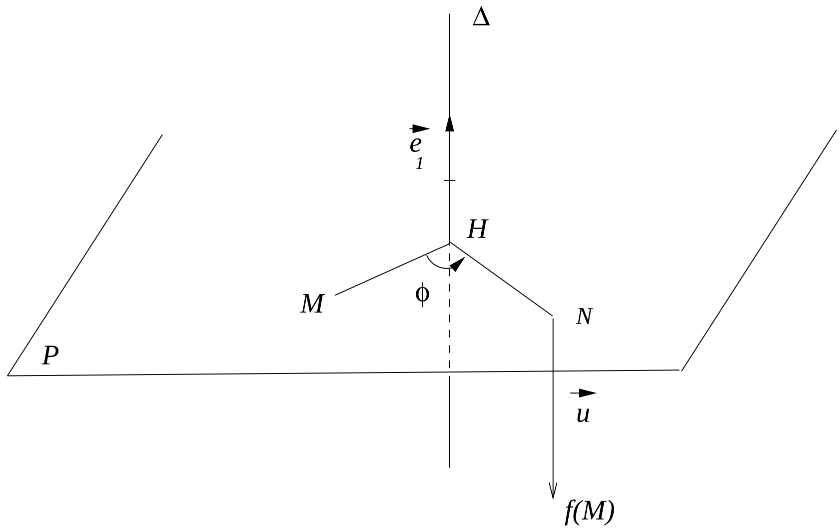
on dit que f est la rotation d'axe Δ et d'angle de mesure φ et on note $f = r(\Delta,\varphi)$.



$*$ si f ne possède aucun point fixe, alors il existe une unique droite Δ de direction $\overrightarrow{\Delta}$ et un unique vecteur $\vec{u} \in \overrightarrow{\Delta}$ tels que

$$f = r(\Delta,\varphi) \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}} \circ r(\Delta,\varphi)$$

on dit que f est le vissage de droite Δ, d'angle de mesure φ et de vecteur $\vec{u}$.



Preuve:

1er cas: $\vec{f} = Id_{\vec{E}}$, alors pour tous points M et N de E, on a $\overrightarrow{f(M)f(N)} = \vec{f}(\overrightarrow{MN}) = \overrightarrow{MN}$ d'où $\overrightarrow{Mf(M)} = \overrightarrow{Nf(N)}$ par la relation de Chasles: f est donc la translation de vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{Mf(M)}$ pour tout point M de E.

2ème cas: $\vec{f}$ est une rotation vectorielle d'axe $\overrightarrow{\Delta}$ et d'angle de mesure $\varphi \not\equiv 0[2\pi]$.

Supposons que f possède au moins un point fixe A, alors d'après I 2.8, l'ensemble des points fixes de f est la droite affine Δ passant par A et de direction $\overrightarrow{\Delta}$; soient M un point de E, $M' = f(M)$ et H la projection orthogonale de M sur la droite Δ, et soit P le plan contenant M et orthogonal à Δ, alors $H \in P$ (H est en fait l'intersection du plan P et de la droite Δ) d'où $\overrightarrow{HM} \in \overrightarrow{P}$ et $\overrightarrow{HM'} = \overrightarrow{f(H)f(M)} = \vec{f}(\overrightarrow{HM})$ donc $\overrightarrow{HM'} \in \overrightarrow{P} = \vec{f}(\overrightarrow{P})$ et ainsi $M' \in P$, $HM = HM'$ et $mes(\widehat{\overrightarrow{HM},\overrightarrow{HM'}}) = \varphi$; de plus la restriction de f au plan P n'est autre que la rotation de centre H et d'angle de mesure φ.

Supposons maintenant que f ne possède aucun point fixe; considérons un point M de E, $M' = f(M)$ et posons $g = t_{\overrightarrow{M'M}} \circ f$, alors $g(M) = t_{\overrightarrow{M'M}}(M') = M$ et ainsi g possède un point fixe; de plus $\vec{g} = Id_{\vec{E}} \circ \vec{f} = \vec{f}$ donc, d'après le cas précédent, g est la rotation d'axe Δ, la droite passant par le point M et de direction $\overrightarrow{\Delta}$, et d'angle de mesure φ: $g = r(\Delta,\varphi)$. On a donc $f = t_{\overrightarrow{MM'}} \circ r(\Delta,\varphi)$.

Soit P le plan contenant M et orthogonal à Δ, alors le point N de P, projection orthogonale de M' sur P, est tel qu'on ait la décomposition

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NM'}$$

dans la somme directe orthogonale $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{P} \oplus \overrightarrow{\Delta}$, alors

$$t_{\overrightarrow{MM'}} = t_{\overrightarrow{MN}} \circ t_{\overrightarrow{NM'}} = t_{\overrightarrow{NM'}} \circ t_{\overrightarrow{MN}}$$

d'où

$$f = t_{\overrightarrow{NM'}} \circ t_{\overrightarrow{MN}} \circ r(\Delta,\varphi)$$

Notons $h = t_{\overrightarrow{MN}} \circ r(\Delta,\varphi)$ et montrons que h est une rotation d'angle de mesure φ et d'axe une droite Δ' parallèle à Δ: on a de manière évidente $\vec{h} = \vec{f}$, considérons maintenant dans le plan P la rotation $r(M,\varphi)$ de centre M et d'angle de mesure φ ; d'après II 2.4, on a $t_{\overrightarrow{MN}} \circ r(M,\varphi) = r(K,\varphi)$ pour un certain point K de P ; si on note $K_1 = r(M,\varphi)(K)$, on a alors $K_1 \in P$ et $t_{\overrightarrow{MN}}(K_1) = t_{\overrightarrow{MN}} \circ r(M,\varphi)(K) = r(K,\varphi)(K) = K$, de plus la rotation $r(M,\varphi)$ n'est autre que la restriction au plan P de la rotation $r(\Delta,\varphi)$, donc $K_1 = r(\Delta,\varphi)(K)$, d'où $t_{\overrightarrow{MN}} \circ r(\Delta,\varphi)(K) = t_{\overrightarrow{MN}}(K_1) = K$ i.e $h(K) = K$: on en déduit aussitôt que h est la rotation d'angle de mesure φ et d'axe la droite Δ' parallèle à Δ passant par K.

Donc $f = t_{\overrightarrow{NM'}} \circ r(\Delta',\varphi) = r(\Delta',\varphi) \circ t_{\overrightarrow{NM'}}$ où le vecteur de translation $\overrightarrow{NM'}$ est parallèle à la droite Δ'.

<u>Unicité</u> :

L'angle de f est celui de la rotation vectorielle $\vec{f}$ donc est défini de manière unique.

Supposons qu'il existe deux droites Δ_1 et Δ_2 de direction $\overrightarrow{\Delta}$ et deux vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ de $\overrightarrow{\Delta}$ tels que

$$f = t_{\overrightarrow{u_1}} \circ r(\Delta_1,\varphi) = t_{\overrightarrow{u_2}} \circ r(\Delta_2,\varphi)$$

alors on a

$$t_{\overrightarrow{u_1}-\overrightarrow{u_2}} \circ r(\Delta_1,\varphi) = r(\Delta_2,\varphi)$$

donc pour tout point M de Δ_2, on a

$$t_{\overrightarrow{u_1}-\overrightarrow{u_2}} \circ r(\Delta_1,\varphi)(M) = r(\Delta_2,\varphi)(M) = M$$

ou encore, en posant $M_1 = r(\Delta_1,\varphi)(M)$,

$$t_{\overrightarrow{u_1}-\overrightarrow{u_2}}(M_1) = M$$

donc $\overrightarrow{M_1M} = \overrightarrow{u_1} - \overrightarrow{u_2} \in \overrightarrow{\Delta}$; or par définition de M_1, on a $\overrightarrow{M_1M} \perp \overrightarrow{\Delta}$ d'où $\overrightarrow{M_1M} = \vec{0}$ et ainsi $\overrightarrow{u_1} = \overrightarrow{u_2}$, d'où $r(\Delta_1,\varphi) = r(\Delta_2,\varphi)$ et par conséquent $\Delta_1 = \Delta_2$.

□

2.8 Théorème

Soit f un antidéplacement de E, alors $\vec{f} \in \mathcal{O}^-(\overrightarrow{E})$ donc on a deux cas :

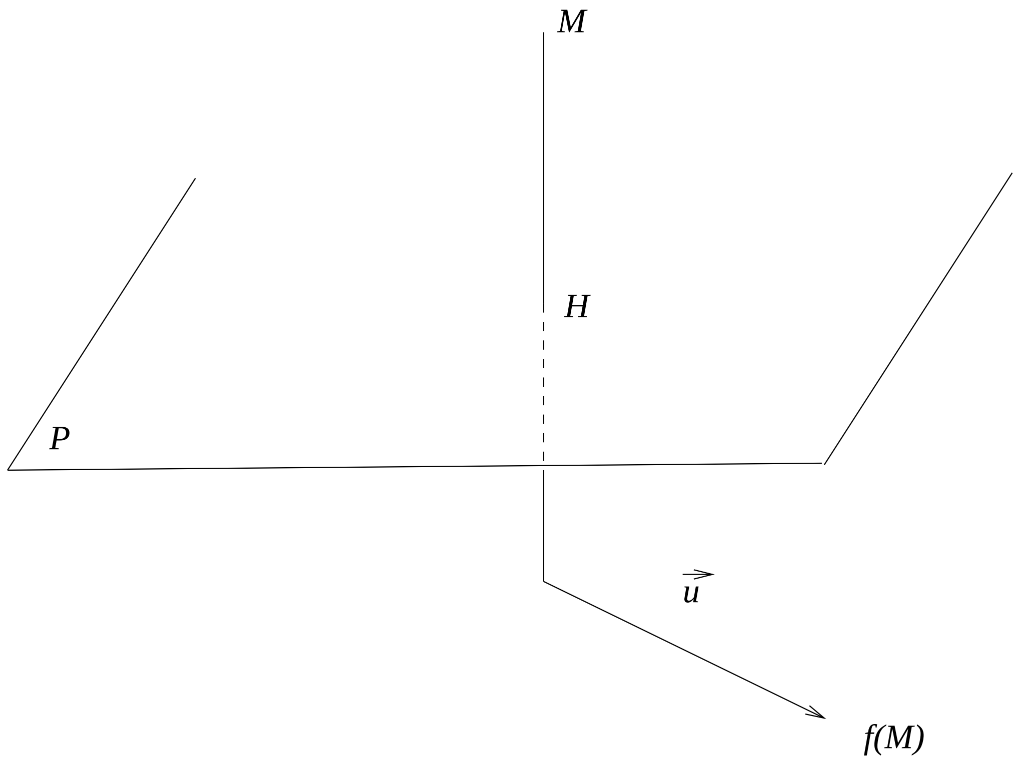
1er cas : $\ker(\vec{f} - Id_{\overrightarrow{E}})$ est un plan $\overrightarrow{P}$, alors $\vec{f}$ est la symétrie orthogonale par rapport au plan $\overrightarrow{P}$ et on a :

$*$ si f possède au moins un point fixe, alors l'ensemble des points fixes de f est un plan P de direction $\overrightarrow{P}$ et f est la réflexion s_P de plan P.

$*$ si f ne possède aucun point fixe, alors il existe un unique plan P de direction $\overrightarrow{P}$ et un unique vecteur $\vec{u} \in \overrightarrow{P}$ telle que

$$f = s_P \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}} \circ s_P$$

on dit que f est la symétrie glissante de plan P et de vecteur $\vec{u}$.

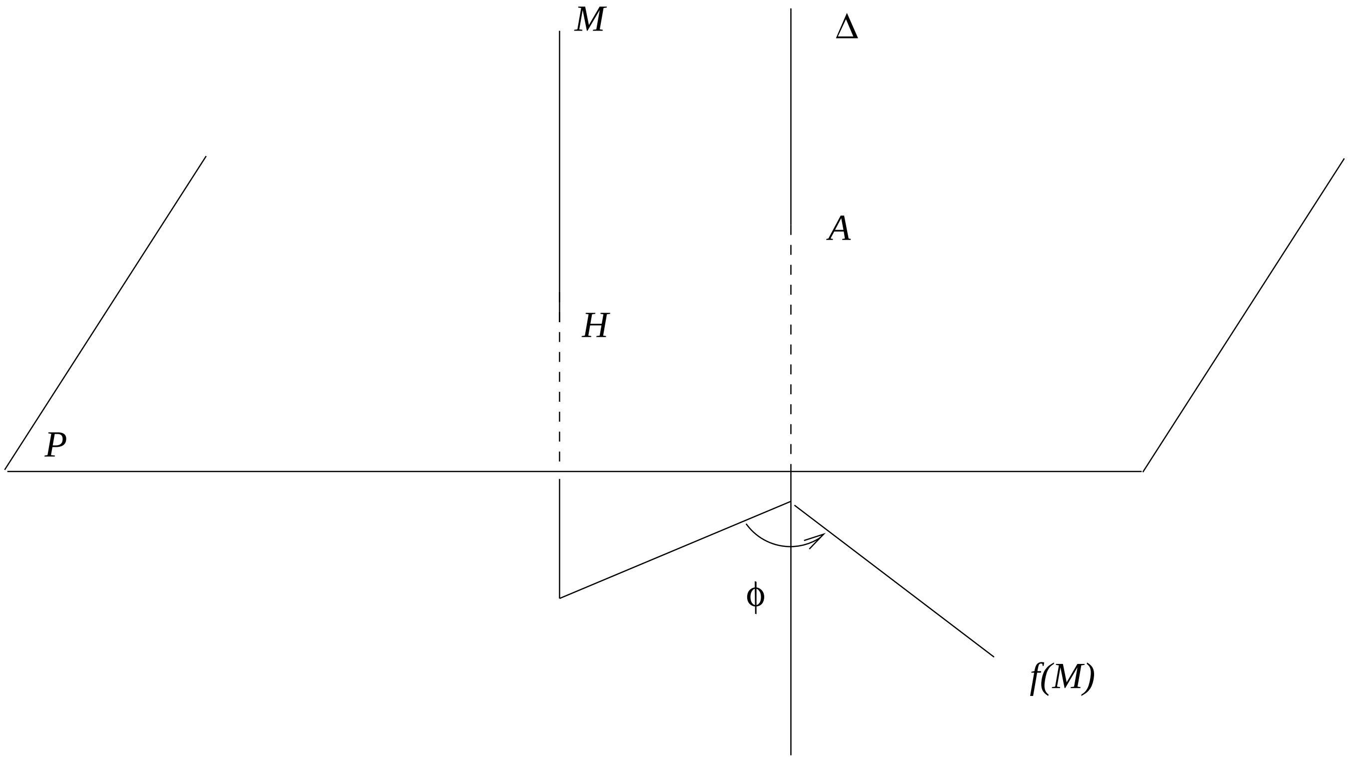


2ème cas : $\ker(\vec{f} - Id_{\vec{E}}) = \{0\}$ et on a :

$*$ si $\vec{f} \neq -Id_{\vec{E}}$ alors $\ker(\vec{f} + Id_{\vec{E}})$ est une droite $\overrightarrow{\Delta}$ et il existe une unique droite Δ de direction $\overrightarrow{\Delta}$, un unique plan P orthogonal à Δ et un unique angle de mesure φ mesuré dans le plan $\overrightarrow{P}$ orienté par le choix d'un vecteur directeur de Δ, tels que

$$f = s_P \circ r(\Delta,\varphi) = r(\Delta,\varphi) \circ s_P$$

on dit que f est la réflexion-rotation de plan P, d'axe Δ et d'angle de mesure φ.



$*$ si $\vec{f} = -Id_{\vec{E}}$, alors f possède un unique point fixe A et f est la symétrie centrale de centre A ; de plus on peut voir f comme une réflexion-rotation mais il n'y a pas unicité du plan et de la droite : pour tout plan P contenant A et toute droite Δ contenant A et orthogonale à P, on a $f = s_P \circ r(\Delta,\pi) = r(\Delta,\pi) \circ s_P$.

Preuve :

L'endomorphisme $\vec{f} \in \mathcal{O}^-(\vec{E})$ donc il existe une base orthonormée de $\vec{E}$ dans laquelle la matrice de $\vec{f}$ est de la forme

$$A' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

1er cas : $\varphi \equiv 0[2\pi]$, alors

$$A' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et on est dans le cas où $\ker(\vec{f} - Id_{\vec{E}})$ est un plan $\vec{P}$, $\vec{f}$ est alors la symétrie orthogonale par rapport au plan $\vec{P}$:

$*$ si f possède au moins un point fixe A , alors l'ensemble des points fixes de f est le plan P passant par A et de direction $\vec{P}$; considérons s_P la réflexion de plan P : on a alors $\vec{s_P} = \vec{f}$ et $f(A) = A = s_P(A)$ donc $f = s_P$ d'après I 2.2.

$*$ si f ne possède aucun point fixe, considérons un point M de E, $M' = f(M)$ et posons $g = t_{\overrightarrow{M'M}} \circ f$, alors $g(M) = t_{\overrightarrow{M'M}}(M') = M$ et ainsi g possède un point fixe ; de plus $\vec{g} = Id_{\vec{E}} \circ \vec{f} = \vec{f}$ donc, d'après le cas précédent, g est la réflexion de plan P où P est le plan passant par M et de direction $\vec{P}$, et ainsi

$$f = t_{\overrightarrow{MM'}} \circ s_P.$$

Considérons la droite $\overrightarrow{\Delta}=\overrightarrow{P}^{\perp}$, alors le point N de P projection orthogonale de M' sur P est tel qu'on ait la décomposition

$$\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NM'}$$

dans la somme directe orthogonale $\overrightarrow{E}=\overrightarrow{P}\oplus\overrightarrow{\Delta}$, alors

$$t_{\overrightarrow{MM'}}=t_{\overrightarrow{MN}}\circ t_{\overrightarrow{NM'}}$$

d'où

$$f=t_{\overrightarrow{MN}}\circ t_{\overrightarrow{NM'}}\circ s_P$$

Notons $h=t_{\overrightarrow{NM'}}\circ s_P$ et montrons que h est une réflexion ; on a de manière évidente $\vec{h}=\overrightarrow{s_P}$, considérons alors le plan P' parallèle à P passant par le point Ω milieu de $[N,M']$: on a $s_P(\Omega)=\Omega_1$ où Ω_1 est le point de E vérifiant $\overrightarrow{\Omega\Omega_1}=2\overrightarrow{\Omega N}=\overrightarrow{M'N}$ donc $\overrightarrow{\Omega_1\Omega}=\overrightarrow{NM'}$ d'où $h(\Omega)=t_{\overrightarrow{NM'}}(\Omega_1)=\Omega$ et ainsi h est la réflexion de plan P' ; on en déduit

$$f=t_{\vec{u}}\circ s_{P'}=s_{P'}\circ t_{\vec{u}}$$

où $\vec{u}\in\overrightarrow{P'}=\overrightarrow{P}$.

<u>Unicité</u> :

Supposons qu'il existe deux plans P_1 et P_2 de direction $\overrightarrow{P}$ et deux vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ de $\overrightarrow{P}$ tels que

$$f=t_{\overrightarrow{u_1}}\circ s_{P_1}=t_{\overrightarrow{u_2}}\circ s_{P_2}$$

alors on a

$$t_{\overrightarrow{u_1}-\overrightarrow{u_2}}\circ s_{P_1}=s_{P_2}$$

donc pour tout point M de P_2, on a

$$t_{\overrightarrow{u_1}-\overrightarrow{u_2}}\circ s_{P_1}(M)=s_{P_2}(M)=M$$

ou encore, en posant $M_1=s_{P_1}(M)$,

$$t_{\overrightarrow{u_1}-\overrightarrow{u_2}}(M_1)=M$$

donc $\overrightarrow{M_1M}=\overrightarrow{u_1}-\overrightarrow{u_2}\in\overrightarrow{P}$; or par définition de M_1, on a $\overrightarrow{M_1M}\perp\overrightarrow{P}$ d'où $\overrightarrow{M_1M}=\vec{0}$ et ainsi $\overrightarrow{u_1}=\overrightarrow{u_2}$, d'où $s_{P_1}=s_{P_2}$ et par conséquent $P_1=P_2$.

2ème cas : $\varphi\not\equiv 0[2\pi]$, alors on constate que $\ker(\vec{f}-Id_{\overrightarrow{E}})=\{0\}$.

$*$ si $\vec{f}\neq -Id_{\overrightarrow{E}}$, on voit facilement que $\ker(\vec{f}+Id_{\overrightarrow{E}})$ est une droite $\overrightarrow{\Delta}$; alors si on note $\overrightarrow{P}=\overrightarrow{\Delta}^{\perp}$, $\vec{s}$ la symétrie orthogonale par rapport au plan $\overrightarrow{P}$ et $\vec{r}$ la rotation d'axe $\overrightarrow{\Delta}$ et d'angle de mesure φ, on a aussitôt

$$\vec{f}=\vec{s}\circ\vec{r}=\vec{r}\circ\vec{s}.$$

D'autre part, 1 n'est pas valeur propre de f donc f possède un unique point fixe A : considérons alors le plan affine P passant par A de direction $\overrightarrow{P}$, la droite affine Δ passant par A de direction $\overrightarrow{\Delta}$ et $g=r(\Delta,\varphi)\circ s_P$; comme $P\perp\Delta$, on a $g=r(\Delta,\varphi)\circ s_P=s_P\circ r(\Delta,\varphi)$, de plus $A\in P\cap\Delta$ donc $g(A)=A=f(A)$ et $\vec{g}=\overrightarrow{r(\Delta,\varphi)}\circ\overrightarrow{s_P}=\vec{r}\circ\vec{s}=\vec{f}$, donc $f=g$ est une réflexion-rotation.

Unicité :

L'angle de la réflexion-rotation f est celui de la rotation vectorielle $\vec{r}$ donc est défini de manière unique.

Supposons qu'il existe deux droites Δ_1 et Δ_2 de direction $\overrightarrow{\Delta}$ et deux plans P_1 et P_2 orthogonaux à Δ_1 et Δ_2 (donc parallèles) tels que

$$f = s_{P_1} \circ r(\Delta_1,\varphi) = s_{P_2} \circ r(\Delta_2,\varphi)$$

alors $P_1 \cap \Delta_1$ est réduit à un point A_1 et $P_2 \cap \Delta_2$ est réduit à un point A_2 ; ces deux points A_1 et A_2 sont des points fixes de f d'où $A_1 = A_2 = A$, on en déduit aussitôt que $\Delta_1 = \Delta_2$ et $P_1 = P_2$.

$*$ si $\vec{f} = -Id_{\overrightarrow{E}}$, alors f possède un unique point fixe A puisque 1 n'est pas valeur propre de $\vec{f}$, et pour tout point M de E on a

$$\overrightarrow{Af(M)} = \overrightarrow{f(A)f(M)} = \vec{f}(\overrightarrow{AM}) = -\overrightarrow{AM}$$

donc f est la symétrie centrale de centre A ; de plus on voit facilement que pour tout plan P contenant A et toute droite Δ contenant A et orthogonale à P, on a

$$f = s_P \circ r(\Delta,\pi) = r(\Delta,\pi) \circ s_P$$

f est donc une réflexion-rotation d'angle de mesure $\pi[2\pi]$ mais dans ce cas il n'y a pas unicité du plan et de la droite.

□

2.9 Etude pratique d'une isométrie de E

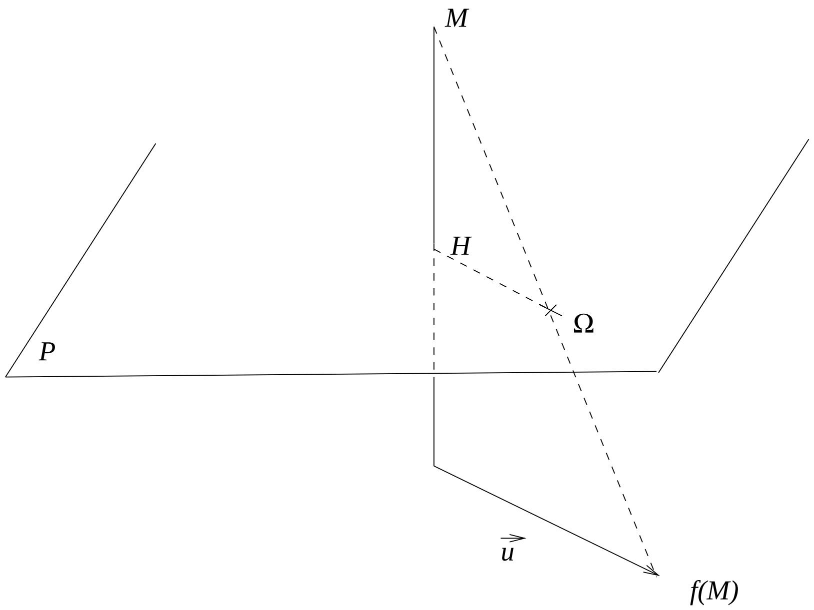
On considère une application affine f de E exprimée dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de E de la manière suivante

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

alors f est une isométrie si et seulement si son application linéaire associée $\vec{f}$ est un endomorphisme orthogonal de $\overrightarrow{E}$, i.e si et seulement si la matrice A est orthogonale puisque la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est orthonormée ; si ${}^tAA = I$, f est donc une isométrie et on étudie alors $\ker(A-I)$:

a) Si $\dim\ker(A-I) = 3$, alors $\vec{f} = Id_{\overrightarrow{E}}$ et f est la translation de vecteur $\overrightarrow{Of(O)} = (a,b,c)$.

b) Si $\dim\ker(A-I) = 2$, alors $\vec{f}$ est la symétrie vectorielle orthogonale par rapport au plan $\overrightarrow{P} = \ker(A-I)$ et f est une symétrie glissante de plan P dirigé par $\overrightarrow{P}$ et de vecteur $\vec{u} \in \overrightarrow{P}$; pour déterminer le plan P il suffit de connaître un point de ce plan, or pour tout point M de E, on voit facilement grâce au théorème de Thalès que le milieu du segment $[M,f(M)]$ appartient au plan P, en particulier le milieu $\Omega = (\frac{a}{2},\frac{b}{2},\frac{c}{2})$ de $[O,f(O)]$ appartient au plan P. D'autre part, pour tout point M de P on a $f(M) = t_{\vec{u}}(M)$ donc $\vec{u} = \overrightarrow{\Omega f(\Omega)}$.



Remarque : si $\vec{u} = \vec{0}$, f est la réflexion de plan P.

c) Si $\dim \ker(A - I) = 1$, alors $\vec{f}$ est une rotation vectorielle et en prenant $\vec{e}_1$ un vecteur unitaire directeur de la droite $\ker(A - I)$, $\vec{e}_2$ un vecteur unitaire orthogonal à $\vec{e}_1$, et $\vec{e}_3 = \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2$, la matrice de $\vec{f}$ dans la base orthonormée directe $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ de $\mathbb{R}^3$ est de la forme

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \qquad \text{où } \varphi \not\equiv 0[2\pi].$$

f est alors un vissage d'axe Δ de direction $\overrightarrow{\Delta} = \ker(A - I)$ orienté par $\vec{e}_1$, d'angle de mesure φ calculé dans le plan $\overrightarrow{P} = \overrightarrow{\Delta}^{\perp}$ orienté par la base $(\vec{e}_2, \vec{e}_3)$, et de vecteur $\vec{u} \in \overrightarrow{\Delta}$; il reste à calculer Δ, φ et $\vec{u}$:

<u>Calcul de φ</u> : $\cos\varphi = \dfrac{1}{2}(tr(A) - 1)$ et $\sin\varphi = \langle \vec{f}(\vec{e}_2) | \vec{e}_3 \rangle$.

<u>Calcul de $\vec{u}$</u> : pour tout point M de E, notons M_1 l'image de M par la rotation d'axe Δ et d'angle de mesure φ, alors on a :

$$\overrightarrow{Mf(M)} = \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1 f(M)} = \overrightarrow{MM_1} + \vec{u}$$

d'où

$$\langle \vec{e}_1 | \overrightarrow{Mf(M)} \rangle = \langle \vec{e}_1 | \overrightarrow{MM_1} \rangle + \langle \vec{e}_1 | \vec{u} \rangle$$

or M et M_1 sont dans un plan orthogonal à Δ donc $\langle \vec{e}_1 | \overrightarrow{MM_1} \rangle = 0$ et $\vec{u}$ est colinéaire à $\vec{e}_1$ donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{u} = \lambda \vec{e}_1$, d'où $\langle \vec{e}_1 | \overrightarrow{Mf(M)} \rangle = \lambda$, en particulier $\lambda = \langle \vec{e}_1 | \overrightarrow{Of(O)} \rangle$.

<u>Calcul de Δ</u> : les points M de Δ sont caractérisés par le fait que $f(M) = t_{\vec{u}}(M)$, il suffit donc de résoudre l'équation $\overrightarrow{Mf(M)} = \vec{u}$ pour obtenir les équations de Δ.

Remarque : si $\vec{u} = \vec{0}$, f est la rotation d'axe Δ et d'angle de mesure φ.

d) Si $\dim \ker(A - I) = 0$, alors on calcule $\ker(A + I)$ (et dans ce cas seulement !) qui est nécessairement de dimension 1 sauf dans le cas particulier où $A = -I$.

Si $A \neq -I$, en prenant $\vec{e}_1$ un vecteur unitaire directeur de la droite $\overrightarrow{\Delta} = \ker(A+I)$, $\vec{e}_2$ un vecteur unitaire orthogonal à $\vec{e}_1$, et $\vec{e}_3 = \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2$, la matrice de $\vec{f}$ dans la base orthonormée directe $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ de $\mathbb{R}^3$ est de la forme :

$$A =' \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \qquad \text{où } \varphi \not\equiv 0[2\pi].$$

Alors f est la réflexion-rotation d'axe Δ de direction $\overrightarrow{\Delta} = \ker(A+I)$ orienté par $\vec{e}_1$, de plan P dirigé par $\vec{P} = \overrightarrow{\Delta}^{\perp}$, et d'angle de mesure φ calculé dans le plan $\vec{P}$ orienté par la base $(\vec{e}_2,\vec{e}_3)$.

<u>Calcul de φ</u> : $\cos\varphi = \frac{1}{2}(tr(A)+1)$ et $\sin\varphi = \langle f(\vec{e}_2)|\vec{e}_3\rangle$.

<u>Calcul de Δ et P</u> : on connaît la direction de Δ et P, de plus Δ et P se coupent en l'unique point fixe Ω de f, il suffit donc de résoudre l'équation $f(M) = M$ pour calculer le point Ω et ainsi déterminer P et Δ.

2.10 Exemples

a) soit f l'application affine de E dans E définie dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de E par

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

On vérifie facilement que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est orthogonale, donc f est une isométrie.

On calcule $\ker(A-I)$: c'est une droite engendrée par le vecteur unitaire $\vec{e}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$ donc f est un vissage d'axe une droite Δ dirigée par $\vec{e}_1$, d'angle de mesure φ et de vecteur $\vec{u} = \lambda\vec{e}_1$. Choisissons un vecteur unitaire $\vec{e}_2$ orthogonal à $\vec{e}_1$, par exemple $\vec{e}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)$ et posons $\vec{e}_3 = \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)$; alors la matrice A' de $\vec{f}$ dans la base orthonormée directe $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ de $\mathbb{R}^3$ est de la forme

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

d'où $1 + 2\cos\varphi = tr(A') = tr(A) = 0$ et ainsi $\cos\varphi = -\dfrac{1}{2}$;

de plus $\sin\varphi = \langle f(\vec{e}_2)|\vec{e}_3\rangle = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ donc $\varphi \equiv \dfrac{2\pi}{3}[2\pi]$ dans le plan $\vec{P} = \overrightarrow{\Delta}^{\perp}$ orienté par la base $(\vec{e}_2,\vec{e}_3)$.

D'autre part, $\vec{u} = \lambda\vec{e}_1$ où $\lambda = \langle \vec{e}_1|\overrightarrow{Of(O)}\rangle = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ donc $\vec{u} = \dfrac{2}{3}(1,1,1)$

Enfin les points M de l'axe Δ sont caractérisés par $\overrightarrow{Mf(M)} = \vec{u}$, d'où Δ est la droite dirigée par $\vec{e}_1$ passant par le point $A = (\frac{1}{3},0,\frac{2}{3})$.

b) soit f l' application affine de E dans E définie dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de E par

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

On vérifie facilement que la matrice

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

est orthogonale, donc f est une isométrie.

On calcule $\ker(A-I)$: c'est un plan $\overrightarrow{P}$ d'équation $x-2y-z=0$ donc f est une symétrie glissante de plan P de direction $\overrightarrow{P}$ et de vecteur $\vec{u} \in \overrightarrow{P}$; le point $\Omega = (\frac{1}{2},1,\frac{1}{2})$ milieu de $[0,f(0)]$ appartient à P, donc P est le plan affine d'équation $x-2y-z=-2$, de plus pour tout point M de P, $\vec{u} = \overrightarrow{Mf(M)}$, donc $\vec{u} = \overrightarrow{\Omega f(\Omega)} = \frac{1}{3}(4,2,1)$.

c) soit f l' application affine de E dans E définie dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de E par

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

On vérifie facilement que la matrice

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

est orthogonale, donc f est une isométrie.

On constate que $\ker(A-I) = \{0\}$ donc f est une réflexion-rotation ; on calcule donc $\ker(A+I)$: c'est une droite $\overrightarrow{\Delta}$ dirigée par le vecteur unitaire $\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)$. Choisissons un vecteur unitaire $\vec{e}_2$ orthogonal à $\vec{e}_1$, par exemple $\vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1)$ et posons $\vec{e}_3 = \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 = (-1,0,0)$; alors la matrice A' de $\vec{f}$ dans la base orthonormée directe $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ de $\mathbb{R}^3$ est de la forme :

$$A' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

d'où $-1 + 2\cos\varphi = tr(A') = tr(A) = -\frac{5}{3}$ et ainsi $\cos\varphi = -\frac{1}{3}$;

de plus $\sin\varphi = \langle f(\vec{e}_2)|\vec{e}_3\rangle = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Déterminons l'unique point fixe Ω de f : on résout l'équation $f(M) = M$ et on trouve $\Omega = (\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$.

Donc f est la réflexion-rotation d'axe la droite Δ dirigée par $\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)$ et passant par le point $\Omega = (\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$, de plan P orthogonal à Δ et passant par le point $\Omega = (\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ i.e le plan d'équation $y + z = 0$, et d'angle de mesure φ mesuré dans le plan $\overrightarrow{P}$ orienté par la base $(\vec{e}_2, \vec{e}_3)$ défini par $\cos\varphi = -\frac{1}{3}$ et $\sin\varphi = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

3 Etude géométrique

3.1 Composée de deux réflexions

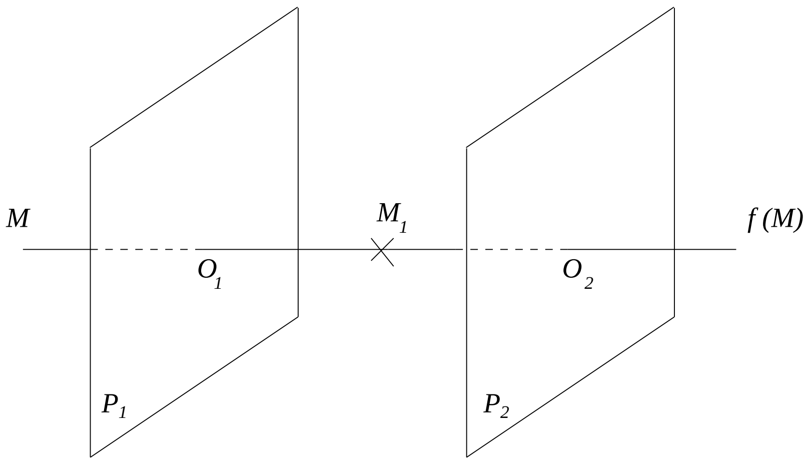
Soient P_1 et P_2 deux plans distincts de E et soient s_1 et s_2 les réflexions de plans respectifs P_1 et P_2.

1er cas : $P_1 // P_2$: alors $s_2 \circ s_1$ est la translation de vecteur $2\vec{u}$ où $\vec{u}$ est un vecteur orthogonal aux deux plans P_1 et P_2 tel que $t_{\vec{u}}(P_1) = P_2$; réciproquement, toute translation de vecteur $\vec{v}$ peut s'écrire comme composée de deux réflexions $s_2 \circ s_1$ où P_1 est un plan quelconque orthogonal à $\vec{v}$ et où P_2 est le plan parallèle à P_1, image de P_1 par la translation de vecteur $\frac{1}{2}\vec{v}$.

2ème cas : $P_1 \cap P_2 = \Delta$: alors $s_2 \circ s_1$ est la rotation d'axe Δ et d'angle $2(\widehat{P_1, P_2})$; réciproquement toute rotation d'axe Δ et d'angle α peut s'écrire comme composée de deux réflexions $s_2 \circ s_1$ où P_1 est un plan quelconque contenant Δ et où P_2 est le plan contenant Δ tel que $(\widehat{P_1, P_2}) = \frac{1}{2}\alpha$.

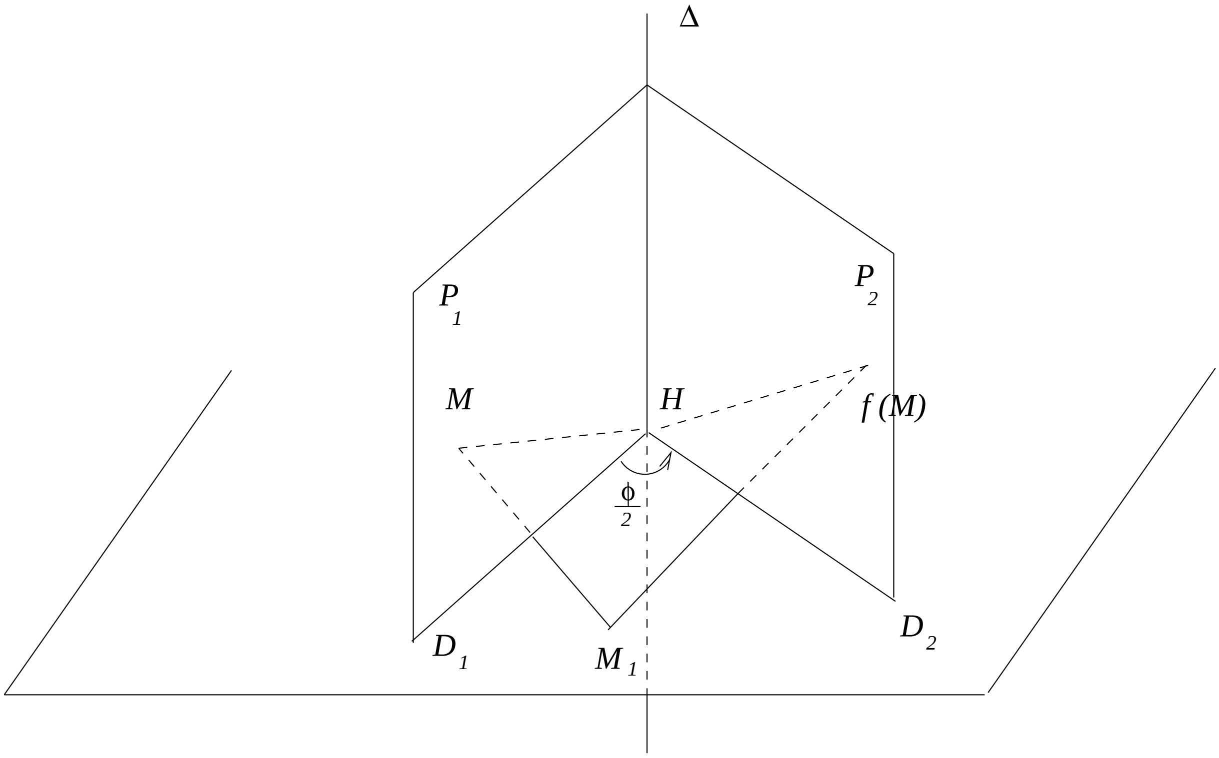
Preuve : soit M un point de E : $M \xmapsto{s_1} M_1 \xmapsto{s_2} M'$

1er cas : $P_1 // P_2$: soit O_1 (resp. O_2) la projection orthogonale de M sur P_1 (resp. P_2), alors $\overrightarrow{MM_1} = 2\overrightarrow{O_1M_1}$ et $\overrightarrow{M_1M'} = 2\overrightarrow{M_1O_2}$, d'où $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{O_1O_2}$. Ainsi $s_2 \circ s_1$ est la translation de vecteur $2\vec{u}$ où $\vec{u}$ désigne "l'écart" entre les deux plans P_1 et P_2.



2ème cas : $P_1 \cap P_2 = \Delta$: considérons P le plan passant par M et orthogonal à Δ, $D_1 = P_1 \cap P$ et $D_2 = P_2 \cap P$, et soit H la projection orthogonale de M sur Δ (alors H est l'intersection de P et Δ) ; comme $M_1 = s_1(M)$, le plan P_1 est le plan médiateur de M

et M_1, donc la droite (MM_1) est orthogonale à Δ, d'où $M_1 \in P$ et il est clair que M_1 est l'image de M par la symétrie axiale d'axe D_1 dans le plan P, de même $M' \in P$ et M' est l'image de M_1 par la symétrie axiale d'axe D_2 dans le plan P : donc M' est l'image de M par la rotation de centre H et d'angle $2(\widehat{D_1,D_2}) = 2(\widehat{P_1,P_2})$, donc $s_2 \circ s_1$ est la rotation d'axe Δ et d'angle $2(\widehat{P_1,P_2})$.



□

3.2 Théorème

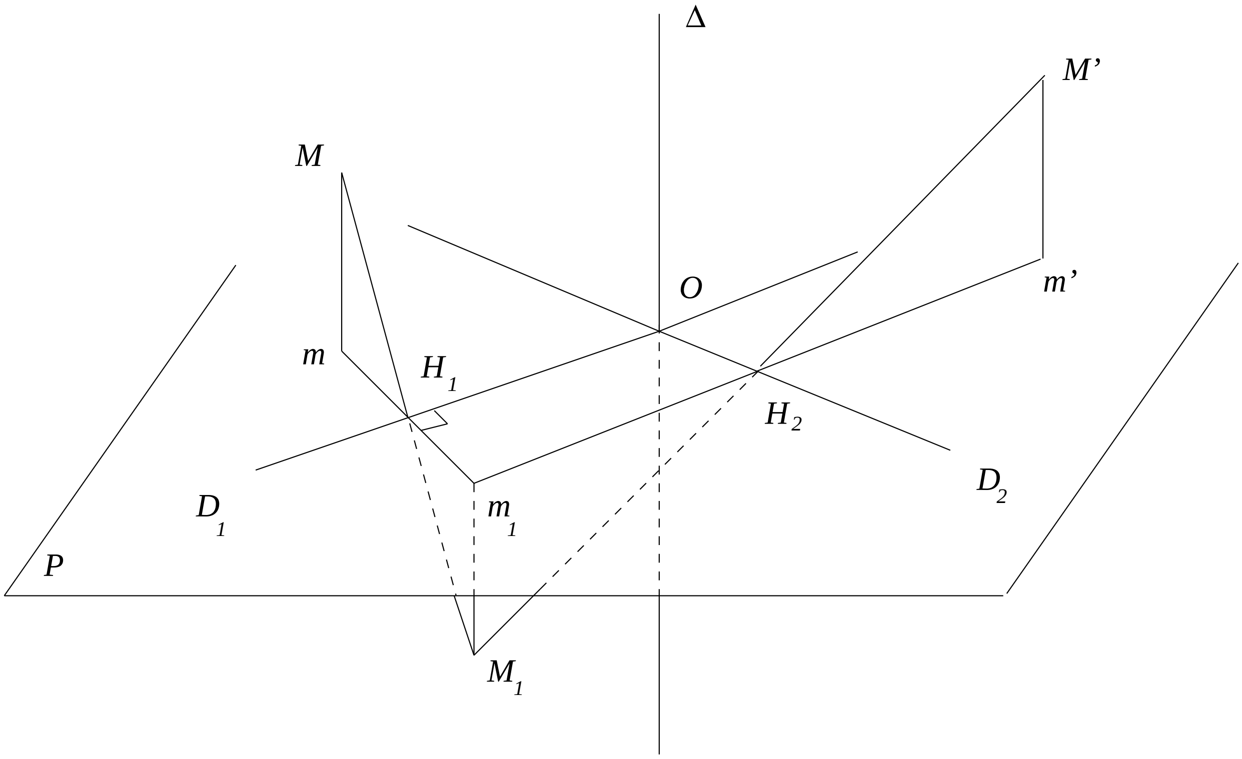
Soient P_1 et P_2 deux plans distincts de E et soient s_1 et s_2 les réflexions de plans respectifs P_1 et P_2 ; soit P un plan orthogonal à P_1 et P_2 (si P_1 n'est pas parallèle à P_2, P est donc orthogonal à la droite $\Delta = P_1 \cap P_2$). Notons $D_1 = P_1 \cap P$, $D_2 = P_2 \cap P$ et σ_1, σ_2 les retournements d'axes respectifs D_1 et D_2, alors

$$s_2 \circ s_1 = \sigma_2 \circ \sigma_1.$$

Preuve :

On distingue deux cas selon que les plans P_1 et P_2 sont parallèles ou pas :

1er cas : $P_1 \cap P_2 = \Delta$



Soient M un point de E, $M_1 = \sigma_1(M)$ et $M' = \sigma_2(M_1)$; considérons m, m_1, et m' les projections orthogonales sur P de M, M_1 et M' respectivement, H_1 le milieu de $[M,M_1]$ et H_2 le milieu de $[M_1,M']$: $H_1 \in D_1$ et $H_2 \in D_2$.

La projection orthogonale p sur P étant une application affine, $p(H_1)$ est le milieu de $[p(M),p(M_1)]$ i.e de $[m,m_1]$, or $H_1 \in P$ donc $p(H_1) = H_1$ et ainsi H_1 est le milieu de $[m,m_1]$, d'où

$$\overrightarrow{mM} = \overrightarrow{mH_1} + \overrightarrow{H_1M} = \overrightarrow{H_1m_1} + \overrightarrow{M_1H_1} = \overrightarrow{M_1m_1}$$

de même, on a

$$\overrightarrow{M_1m_1} = \overrightarrow{m'M'} \text{ d'où } \overrightarrow{mM} = \overrightarrow{m'M'}$$

De plus, la droite (mH_1) est orthogonale à D_1, en effet si $\vec{e}_1$ est un vecteur directeur de D_1, on a

$$\langle \overrightarrow{mH_1} | \vec{e}_1 \rangle = \langle \overrightarrow{mM} | \vec{e}_1 \rangle + \langle \overrightarrow{MH_1} | \vec{e}_1 \rangle = 0$$

puisque $\overrightarrow{MH_1}$ est orthogonal à D_1 par définition de σ_1 et $\overrightarrow{mM}$ est orthogonal à P donc à $D_1 \subset P$. Comme H_1 est le milieu de $[m,m_1]$, on en déduit alors que $m_1 = \sigma_1(m)$. De la même façon on obtient $m' = \sigma_2(m_1)$, d'où $m' = \sigma_2 \circ \sigma_1(m)$.

Or la restriction au plan P du retournement σ_1 (resp. σ_2) n'est autre que la symétrie axiale de droite D_1 (resp. D_2) donc $\sigma_2 \circ \sigma_1(m)$ est l'image de m par la rotation plane r de centre O intersection de D_1 et D_2 et d'angle $2(\widehat{D_1,D_2}) = 2(\widehat{P_1,P_2})$; considérons P' le plan orthogonal à Δ passant par M : comme $P'//P$ et $\overrightarrow{mM} = \overrightarrow{m'M'}$, on voit que $M' \in P'$ et ainsi $M' = \rho(M)$ où ρ désigne la rotation d'axe Δ et d'angle $2(\widehat{D_1,D_2}) = 2(\widehat{P_1,P_2})$ i.e $\rho = s_2 \circ s_1$, donc $M' = s_2 \circ s_1(M) = \sigma_2 \circ \sigma_1(M)$: $s_2 \circ s_1 = \sigma_2 \circ \sigma_1$.

2ème cas : $P_1 // P_2$: la démonstration est analogue au 1er cas, à la différence que M' se déduit de M par la translation de vecteur $2\vec{u}$ où $\vec{u}$ est “l'écart” entre les deux droites D_1

et D_2 du plan P donc est aussi "l'écart" entre les plans P_1 et P_2, i.e M' se déduit de M par la composée $s_2 \circ s_1$.

$\square$