Promenade Mathématique

Quatre pas vers l'Analyse

Quang-Thai Ngo, Août 2002

Table des matières

Alphabet grec

Il est utile de connaître l'alphabet grec. Grâce aux " équivalences " avec l'alphabet romain, on mémorisera plus facilement. On utilisera aussi en mathématique quelques lettres hébraïques comme $\aleph$ (lire aleph).

Equivalent alphabet romain	Nom	Minuscule	Majuscule
a	alpha	α	A
b	bêta	β	B
c	chi	χ	X
d	delta	δ	Δ
e	epsilon	ε	E
f	phi	ϕ	Φ
g	gamma	γ	Γ
h	êta	η	H
i	iota	ι	I
j	phi (autre)	φ	/
k	kappa	κ	K
l	lambda	λ	Λ
m	mu	μ	M
n	nu	ν	N
o	omicron	o	O
p	pi	π	Π
q	thêta	θ	Θ
r	rho	ρ	P
s	sigma	σ	Σ
t	tau	τ	T
u	upsilon	υ	Υ
v	/	/	/
w	oméga	ω	Ω
x	xi	ξ	Ξ
y	psi	ψ	Ψ
z	zêta	ζ	Z

Les nombres réels

Le corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels a été construit pour que l'on puisse définir les inverses des nombres entiers relatifs non nul. Bien qu'il soit partout dense, il ne suffit pas à la représentation exacte de tous les nombres qui se présentent en mathématiques. Ainsi, il n'est pas possible de résoudre dans le corps $\mathbb{Q}$ une équation aussi simple que la suivante : $x^2 - 2 = 0$.

Le nombre $\sqrt{2}$ correspond à une lacune dans le corps $\mathbb{Q}$. On est ainsi amené à construire un autre corps $\mathbb{R}$ tel que pour toute partie majorée non vide de $\mathbb{R}$, on ait une borne supérieure. Par ailleurs, $\mathbb{Q}$ n'est pas complets et ses parties non vide majorées sont sans borne supérieure.

Dans la mouvance de la réflexion sur la construction des fondements, plusieurs mathématiciens du 19ème siècle se sont intéressés à bâtir une théorie des irrationnels et les propriétés arithmétiques. Parmi ces mathématiciens, les plus célèbres sont Richard Dedekind, Geog Cantor et K. Weierstrass. Il s'agit de compléter le travail d'Eudoxe élaboré 22 siècles auparavant.

Les étudiants en première année peuvent sauter se chapitre et aller directement au chapitre suivant.

I) Construction de $\mathbb{R}$

A) Corps commutatifs et totalement ordonnés

Etudions tout d'abord les propriétés générales des corps totalement ordonnés.

Définition

☐ Une relation $\leq$ d'ordre sur un ensemble E est une relation d'ordre total lorsque

$$\forall x,\, y \in E,\, x \leq y \text{ ou } y \leq x.$$

☐ Un groupe ordonné est un triplet $(G, +, \leq)$ où $(G, +)$ est un groupe et $\leq$ une relation d'ordre sur G vérifiant

$$\forall x,\, y,\, z \in G,\, x \leq y \Rightarrow xz \leq yz \text{ et } zx \leq zy.$$

Soit 0 l'élément neutre pour la loi $+$. On note

$$G^+ = \{x \in G \;/\; 0 \leq x\} \text{ et } G^- = \{x \in G \;/\; x \leq 0\}.$$

☐ Un anneau ordonné est un quadruplet $(\mathbb{K}, +, ., \leq)$ où $(\mathbb{K}, +, .)$ est un anneau et $\leq$ une relation d'ordre sur $\mathbb{K}$ tel que $(\mathbb{K}, +, \leq)$ soit un groupe ordonné.

On note

$$\mathbb{K}^+ = \{x \in \mathbb{K} \;/\; 0 \leq x\} \text{ et } \mathbb{K}^- = \{x \in \mathbb{K} \;/\; x \leq 0\}.$$

☐ Soit $(K, +, .)$ un anneau unitaire, la caractéristique de $\mathbb{K}$ est le plus petit entier p tel que $p1_{\mathbb{K}} = 0_{\mathbb{K}}$. Lorsque $p = 0$, on dit que $\mathbb{K}$ est de caractéristique nulle.

☐ Un corps $(\mathbb{K}, +, ., \leq)$ ordonné est ordonné en tant que anneau.

☐ Un corps $(\mathbb{K}, +, ., \leq)$ est dit archimédien lorsque

$$\forall (x, y) \in \mathbb{K}^2, \, (0 < x, 0 \leq y) \; \Rightarrow \; (\exists n \in \mathbb{N}, y < nx).$$

☐ Un corps $(\mathbb{K}, +, ., \leq)$ possède la propriété de la borne supérieure lorsque toute partie non vide et majorée de $\mathbb{K}$ admet une borne supérieure.

☐ La caractéristique d'un corps $\mathbb{K}$ est la caractéristique de l'anneau $\mathbb{K}$.

Remarque

Rappelons que la borne supérieure d'une partie est le plus petit des majorants de cette partie.
Les propriétés suivantes caractérisent la borne supérieure S d'une partie E de $\mathbb{K}$:

$$\forall x \in E, \, x \leq S$$
$$\forall \varepsilon > 0, \, \exists x \in E, \, x > S - \varepsilon.$$

Les propriétés suivantes caractérisent la borne inférieure I d'une partie E de $\mathbb{K}$:

$$\forall x \in E, \, I \leq x$$
$$\forall \varepsilon > 0, \, \exists x \in E, \, x < I + \varepsilon.$$

Théorème

i) Etant donné un anneau $(\mathbb{K}, +, .)$, il existe un unique morphisme de $(\mathbb{Z}, +, .)$ vers $(\mathbb{K}, +, .)$. Il est défini par

$$\varphi(n) = n1_{\mathbb{K}}.$$

ii) Si $\mathbb{K}$ est de caractéristique non nulle n, on a, pour tout $x \in \mathbb{K}$, $nx = 0_{\mathbb{K}}$.

iii) Si $\mathbb{K}$ est de caractéristique nulle, alors $\mathbb{K}$ est infini.

iv) Si $\mathbb{K}$ est un corps de caractéristique nulle, alors le plus petit sous-corps de $\mathbb{K}$ est isomorphe à $\mathbb{Q}$, le corps des nombres rationnels.

Preuve

i) Si $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{K}$ est un morphisme d'anneaux, on a nécessairement

$$\varphi(n) = \varphi(n.1) = n\varphi(1) = n1_{\mathbb{K}}.$$

Il est par ailleurs aisé de vérifier que $\varphi(1) = 1_{\mathbb{K}}$.

D'autre part pour tout $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$,

$$\varphi(m + n) = \varphi(m) + \varphi(n).$$
$$\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n).$$

ii) Si $\mathbb{K}$ est de caractéristique non nul n, alors

$$nx = n(1_{\mathbb{K}}x) = (n1_{\mathbb{K}})x = 0_{\mathbb{K}}.$$

iii) Lorsque $\mathbb{K}$ est de caractéristique nulle, le morphisme φ est injectif. Donc $\varphi(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{K}$. Mais $\mathbb{Z}$ est infini, donc $\varphi(\mathbb{Z})$ est également infini.

iv) Lorsque $\mathbb{K}$ est de caractéristique nulle, l'application $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{K}$, $n \mapsto n1_{\mathbb{K}}$ est un morphisme injectif d'anneaux. Dans ce cas, on peut étendre φ à $\mathbb{Q}$. En effet, pour $n > 0$, on a $n1_{\mathbb{K}} \neq 0$. Donc $n1_{\mathbb{K}}$ a un inverse. On pose alors

$$\varphi(1/n) = (n.1_{\mathbb{K}})^{-1},$$

puis

$$\varphi(p/q) = (p.1_{\mathbb{K}})(q.1_{\mathbb{K}})^{-1}.$$

De plus comme l'application $n \mapsto n1_{\mathbb{K}}$ de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{K}$ est strictement croissante, l'application l'est également. Tout ce qui concerne l'ordre est alors conservé. On vérifie que φ définit un homomorphisme de corps.

L'image $\varphi(\mathbb{Q})$ est le plus petit sous-corps de $\mathbb{K}$, dont on prouve ainsi l'existence. En effet, si A est un sous-corps de $\mathbb{K}$, alors il contient $0_{\mathbb{K}}$ et $1_{\mathbb{K}}$. Comme c'est un sous-groupe, il contient tous les $n1_{\mathbb{K}}$ pour $n \in \mathbb{N}$. Comme il contient les $n1_{\mathbb{K}}$ et comme, pour $n \neq 0$, ces éléments sont distincts de 0, il contient les inverses donc les éléments de la forme $(n1_{\mathbb{K}})^{-1}$. Contenant les éléments de la forme $p.1_{\mathbb{K}}$, il contient les $(p.1_{\mathbb{K}})(q.1_{\mathbb{K}})^{-1}$, c'est-à-dire l'image $\varphi(\mathbb{Q})$.

Propriété

Un anneau unitaire, totalement ordonné est de caractéristique nulle, si l'anneau est non nul.

Preuve

Considérons la propriété dépendant de n suivante

$$P(n) : n1 > 0.$$

Dans un anneau non nul, on a : $1 \neq 0$ où 1 est l'élément neutre du produit, et 0 l'élément neutre de l'addition.

Par ailleurs, on peut écrire

$$1^2 = 1 > 0.$$

$P(0)$ est vraie. Supposons que $P(n)$ est vraie. Observons $P(n+1)$:

$$(n+1)1 = n1 + 1.$$

Comme $n1 > 0$ et $1 > 0$, il vient : $n1 + 1 > 0$. Donc $P(n)$ est vraiepour tout $n \in \mathbb{N}$.

Propriété

i) Un corps $(\mathbb{K}, +, ., \leq)$ est archimédien si et seulement si : $\forall x \in \mathbb{K}$, $\exists n \in \mathbb{N}^*$, $x \leq n$.

ii) Soit $(\mathbb{K}, +, ., \leq)$ un corps commutatif totalement ordonné et archimédien, alors pour tout $x \in \mathbb{K}$ il existe $E[x] \in \mathbb{Z}$ tel que

$$E[x] \leq x < E[x] + 1.$$

Preuve

i) Un corps $(\mathbb{K}, +, ., \leq)$ archimédien lorsque :

$$\forall (y, z) \in \mathbb{K}^2,\ (0 < y, 0 \leq z) \ \Rightarrow\ (\exists n \in \mathbb{N}, z < ny).$$

Multiplions l'inégalité par y^{-1}, on obtient :

$$zy^{-1} < n.$$

Or $zy^{-1} \in \mathbb{K}$, donc $\exists x \in \mathbb{K}$ tel que $x = zy^{-1}$. Comme y et z sont arbitraires, il vient

$$\mathbb{K} \text{ archimédien} \Leftrightarrow \ \forall x \in \mathbb{K}, \exists n \in \mathbb{N}^*, x \leq n.$$

La structure de corps permet de simplifier la définition en multipliant par y^{-1}.

ii) Soit $\mathbb{K}$ archimédien et $x \in \mathbb{K}$. Posons

$$A = \{p \in \mathbb{Z}, p \leq x\}.$$

Comme $\mathbb{K}$ est archimédien, il vient :

$$\exists n \in \mathbb{N}, x \leq n.$$

Alors A est majorée. Par ailleurs, A est non vide car $m \in \mathbb{N}$, $-x \leq m$. Comme A est non vide et majorée dans $\mathbb{Z}$, elle admet un plus grand élément que l'on note $E[x]$; il est caractérisé par la propriété :

$$E[x] \leq x < E[x] + 1.$$

La fonction E est en outre **croissante** : si $x \leq y$, alors $E[x] \leq x \leq y$ donc par définition de $E[y]$:

$$E[x] \leq E[y].$$

Propriété

Soit $(\mathbb{K}, +, \times, \leq)$ un corps ordonné. Posons

$$\mathbb{K}_+ = \{x \in \mathbb{K} \ / \ x \geq 0\} \text{ et } \mathbb{K}_- = \{x \in \mathbb{K} \ / \ x \leq 0\}.$$

On a :

i) $\mathbb{K}_- = -(\mathbb{K}_+)$ et $\mathbb{K}_+ = -(\mathbb{K}_-)$

ii) $\mathbb{K}_+ \cap \mathbb{K}_- = \{0\}$

iii) $\mathbb{K}_+ + \mathbb{K}_+ \subset \mathbb{K}_+$

La relation d'ordre $\leq$ est total si et seulement si $\mathbb{K} = \mathbb{K}_+ \cup \mathbb{K}_-$

iv) Si x et y sont de même signe, alors xy est positif.

Si x et y sont de signe contraire, alors xy est négatif.

Preuve

i) Si $x \in \mathbb{K}_+$, alors $x \geq 0$. On additionne par $-x$ membre à membre, on obtient :

$$\begin{array}{ll} & x + (-x) \geq -x \\ \Rightarrow & 0 \geq -x \\ \Rightarrow & -x \in \mathbb{K}_- \\ \Rightarrow & -(\mathbb{K}_+) \subset \mathbb{K}_- \end{array}$$

Réciproquement, si $y \in \mathbb{K}_-$, alors $y \leq 0$. On additionne par $-y$ membre à membre, on obtient :

$$\begin{array}{ll} & y + (-y) \leq -y \\ \Rightarrow & 0 \leq -y \\ \Rightarrow & -y \in \mathbb{K}_+. \end{array}$$

Mais $y = -(-y) \in -(\mathbb{K}_+)$. D'où $\mathbb{K}_- \subset -(\mathbb{K}_+)$. On obtient finalement

$$\mathbb{K}_- = -(\mathbb{K}_+).$$

On refait la même chose pour prouver

$$\mathbb{K}_+ = -(\mathbb{K}_+).$$

ii) Il est clair que $0 \in (\mathbb{K}_- \cap \mathbb{K}_+)$. Donc on a bien

$$\{0\} \subset (\mathbb{K}_- \cap \mathbb{K}_+).$$

Si $x \geq 0$ et $x \leq 0$, c'est-à-dire $x \in (\mathbb{K}_- \cap \mathbb{K}_+)$, alors par anti-symétrie de la relation d'ordre $x = 0$. Finalement

$$(\mathbb{K}_- \cap \mathbb{K}_+) = \{0\}.$$

iii) Soit $x \geq 0$ et $y \geq 0$. Par comptabilité, il vient

$$x + y \geq y \geq 0.$$

Ainsi $\mathbb{K}_+ + \mathbb{K}_+ \subset \mathbb{K}_+$.

Si l'ordre est total, alors $\forall x \in \mathbb{K}$, x est comparable à 0, à savoir $x \leq 0$ ou $x \geq 0$. Donc si l'ordre est total, alors $\forall x \in \mathbb{K}$, soit $x \in \mathbb{K}_-$. D'où $\mathbb{K} = (\mathbb{K}_- \cup \mathbb{K}_+)$.

Réciproquement si $\mathbb{K} = (\mathbb{K}_- \cup \mathbb{K}_+)$, soient $(x, y) \in \mathbb{K}^2$, il vient :

$$x + (-y) \in \mathbb{K} = \mathbb{K}_- \cup \mathbb{K}_+.$$

Par exemple si : $x + (-y) \in \mathbb{K}_+$, alors on a : $x + (-y) \geq 0 \ \Rightarrow \ x \geq y$.

Ainsi x et y sont comparables. On fait la même chose lorsque $x + (-y) \in \mathbb{K}_-$

iv) Si $x > 0$ et $y > 0$, on a par comptabilité de la multiplication avec la relation d'ordre $\leq$.

Théorème

Dans un corps commutatif totalement ordonné $\mathbb{K}$, les propositions suivantes sont équivalentes :

1°) Tout élément de $\mathbb{K}$ est limite dans $\mathbb{K}$ d'une suite de rationnels.

2°) Entre deux éléments de $\mathbb{K}$, il existe au moins un rationnel.

3°) $\mathbb{K}$ est archimédien.

Preuve

Montrons que : i) $\Rightarrow$ ii).

Si tout élément de $\mathbb{K}$ est limite d'une suite de rationnels, alors pour tout x et y de $\mathbb{K}$, l'élément $\dfrac{x+y}{2}$ est limite d'une suite de rationnels. Cela veut dire

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ / \ n > n_0 \Rightarrow \left| \frac{x+y}{2} - r_n \right| < \varepsilon.$$

Cela implique en particulier pour $\varepsilon = \dfrac{y-x}{2}$:

$$\frac{x+y}{2} - r_n < \frac{y-x}{2} \Rightarrow x < r_n.$$
$$r_n - \frac{x+y}{2} < \frac{y-x}{2} \Rightarrow r_n < y.$$

Finalement, entre x et y, il existe un rationnel.

Montrons maintenant que : ii) $\Rightarrow$ iii).

Supposons qu'il existe un rationnel entre deux éléments de $\mathbb{K}$, alors pour tout $x \in \mathbb{K}$, on a :

$$x < r < x + 1.$$

Comme $\mathbb{Q}$ est archimédien, il existe un entier n tel que $r < n$. Donc $\mathbb{K}$ est également archimédien.

Montrons finalement : iii) $\Rightarrow$ i).

On dispose de la partie entière dans un corps commutatif totalement ordonné. Soit $x \in \mathbb{K}$ et (r_n) une suite de rationnels définie par

$$r_n = 2^{-n} E[2^n x].$$

Pour tout n, on a

$$2^n r_n \leq 2^n x < 2^n r_n + 1$$

$$\Rightarrow \qquad 0 \leq x - r_n < 2^{-n}.$$

Mais (2^{-n}) tend vers 0 qui est élément de $\mathbb{Q}$. Soit $\varepsilon \in \mathbb{K}^{+*}$, comme $\mathbb{K}$ est archimédien, il existe p tel que

$$\frac{1}{p} < \varepsilon.$$

Moyennant ceci, on déduit que (2^{-n}) tend vers 0 dans $\mathbb{K}$, puis que (r_n) converge vers x dans $\mathbb{K}$. Donc on a bien l'implication iii) $\Rightarrow$ i).

Lemme

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif totalement ordonné archimédien. On a alors :

1°) Une suite de Cauchy dans $\mathbb{K}$ est bornée.

2°) Toute suite de Cauchy de $\mathbb{K}$ est convergente.

Preuve

1°) Soit (u_n) une suite de Cauchy de $\mathbb{K}$. Appliquons la définition de “suite de Cauchy” à $\varepsilon = 1_{\mathbb{K}}$. On obtient un entier n_0 tel que :

$$\text{pour tous } p \geq q \geq n_0 \Rightarrow |u_p - u_q| \leq 1_{\mathbb{K}}.$$

En particulier, en prenant $q = n_0$, pour tout $p \geq n_0$, on a :

$$|u_p - u_{n_0}| \leq 1_{\mathbb{K}} \Rightarrow u_{n_0} - 1_{\mathbb{K}} \leq u_p \leq u_{n_0} + 1_{\mathbb{K}} \ .$$

On en déduit que pour tout $n \geq 0$:

$$M \min\{u_0, u_1, \ldots, u_{n_0-1}, u_{n_0} - 1\} \leq u_n \leq \max\{u_0, u_1, \ldots, u_{n_0-1}, u_{n_0} + 1\}.$$

2°) Soit (u_n) une suite convergente, et notons $\ell \in \mathbb{K}$ sa limite. Soit un $\varepsilon \in \mathbb{K}^{+*}$ fixé. Appliquons la définition de “converger” . On obtient un entier N tel que pour tout entier $n \geq N$, on ait l'inégalité :

$$|u_n - \ell| \ \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Soit $p \geq q \geq N$ deux entiers ; on a alors :

$$|u_p - u_q| = |(u_p - \ell) - (u_q - \ell)| \leq |u_p - \ell| + |u_q - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Théorème

Dans un corps commutatif totalement ordonné $\mathbb{K}$ archimédien, les propositions suivantes sont équivalentes :

1°) Toute partie non vide majorée admet une borne supérieure.

2°) Toute partie non vide minorée admet une borne inférieure.

3°) Une suite d'éléments de $\mathbb{K}$ est convergente si et seulement si elle est de Cauchy dans $\mathbb{K}$.

4°) Toute suite (u_n) croissante est convergente vers $u = \sup\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ si elle est majorée d'éléments de $\mathbb{K}$, sinon elle tend vers l'infini. On a évidemment un résultat analogue pour les suites décroissantes, minorées ou non.

5°) Soit (I_n) une suite décroissante de segments de $\mathbb{K}$ de diamètres tendant vers 0, alors $\bigcap_n I_n$ est réduite à un singleton.

Démonstration

1°) $\Leftrightarrow$ 2°)

Supposons 1°). Soit E une partie non vide minorée par m. Posons $E' = \{x' - x \in E\}$. Alors E' est non vide est majorée par $-m$. Elle admet donc une borne supérieure S.

$$\forall x \in E', x \leq S$$
$$\forall \beta < S,\ \exists x \in E',\ x > \beta.$$

Donc :

$$\forall y \in E,\ -S \leq y \text{ (poser } x = -y)$$
$$\forall \beta > -S, \exists y \in E, y < \beta$$

(car il existe x élément de E' tel que $-\beta < x$, et l'on pose $y = -x$).

S est donc la borne inférieure de E.

Une démonstration symétrique prouve que 1°) $\Leftrightarrow$ 2°).

1°), 2°) $\Rightarrow$ 3°)

La suite (u_n) de Cauchy dans $\mathbb{K}$ étant minorée, on peut définir pour tout p

$$a_p = \inf\{u_n, n \geq p\}.$$

La suite (a_p) est alors croissante et majorée. On peut donc définir

$$u = \sup\{a_p, p \in \mathbb{N}\}.$$

Soit $\varepsilon \in \mathbb{K}^{+*}$. Par définition d'une suite de Cauchy, on peut écrire :

$$\exists N, n, m \geq N \Rightarrow |u_n - u_m| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Par définition de u et par la croissance de (a_p), on a :

$$\exists p \geq N, 0 \leq u - a_p \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Par définition de a_p, écrivons

$$\exists m \geq p, 0 \leq u_m - a_p \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Alors pour tout $n \geq \mathbb{N}$, on obtient

$$|u_n - u| \leq |u_n - u_m| + |u_m - a_p| + |a_p - u| \leq \varepsilon.$$

On sait par ailleurs que dans $\mathbb{K}$, toute suite convergente est de Cauchy.

3°) Soit (u_n) une suite croissante et $B \in \mathbb{K}$. Si on suppose que (u_n) n'est pas majorée, alors B n'est pas un majorant de la suite. Il existe alors un entier N tel que $B \leq u_N$. Comme (u_n) est croissante, pour tout $n \geq N$, on a

$$u_N \leq u_n \Rightarrow B \leq u_n.$$

C'est exactement la définition de «tendre vers l'infini».

Si (u_n) est majorée d'éléments de $\mathbb{K}$, montrons qu'elle de Cauchy par l'absurde. Supposons le contraire, alors

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{K}^{+*},\ \forall N \in \mathbb{N},\ \exists n,\ p \in \mathbb{N},\ N < n < p \text{ et } u_p - u_n \geq \varepsilon.$$

Pour $N = 0$, alors

$$\exists n_0,\ n_1 \text{ et } 0 < n_0 < n_1 \text{ et } u_{n_1} - u_{n_0} \geq \varepsilon.$$

Pour $N = n_1$, alors

$$\exists n_3,\ n_2 \text{ et } n_1 < n_2 < n_3 \text{ et } u_{n_3} - u_{n_2} \geq \varepsilon.$$

Par récurrence, on construit une suite strictement croissante $(n_k)_{k \geq 0}$ d'entiers telle que

$$\forall k \geq 0,\ u_{n_{2k+1}} - u_{n_{2k}} \geq \varepsilon.$$

Il suit

$$\forall k \geq 0,\ u_{n_{2k+2}} - u_{n_{2k}} \geq u_{n_{2k+1}} - u_{n_{2k}} \geq \varepsilon.$$

Puis par récurrence

$$\forall k \geq 0,\ u_{n_{2k}} \geq u_{n_0} + k\varepsilon.$$

La suite (u_n) étant majorée, il en est de même de la suite $(k\varepsilon)_{k \geq 0}$, ce qui n'est pas vu que $\mathbb{K}$ est archimédien. Donc (u_n) est de Cauchy, c'est-à-dire convergente. Posons $u = \sup\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$, alors u est un majorant de $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ et on a : $\forall n, u \geq u_n$. Par ailleurs, soit y un majorant de $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$, alors $\forall n,\ u_n \leq y$, donc $u \leq y$. Ainsi, u est le plus petit des majorants.

4°) $\Rightarrow$ 5°)

Posons $I_n = [a_n, b_n]$ avec $a_n \leq b_n$ et $\lim\limits_{n \to \infty} (b_n - a_n) = 0$. La suite (a_n) est croissante majorée par b_0, donc elle converge vers $a \in \mathbb{K}$. De même, la suite (b_n) est décroissante minorée par a_0, donc elle converge vers $b \in \mathbb{K}$.

Comme $\lim\limits_{n \to \infty} (b_n - a_n) = 0$, alors $a = b \in I_n$. Il ne reste plus qu'à vérifier que $\bigcap\limits_n I_n$ est un singleton. Supposons qu'il existe $c \neq a$ dans $\bigcap\limits_n I_n$, avec par exemple $c < a$ (idem dans l'autre cas), alors vu que

$$a = \sup\{a_n, n \in \mathbb{N}\},$$

il existe N tel que

$$c < a_N \leq a,$$

puis

$$c \notin I_N.$$

Ceci est absurde. Donc $\bigcap_n I_n = \{a\}$.

Réciproquement, soit $I_n = [a_n, b_n]$ avec $\forall n$, $a_n \leq b_n$, une suite décroissante de segments de $\mathbb{K}$, de diamètre tendant vers 0, et $\{x\} = \bigcap_n I_n$. On a :

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n = x.$$

En effet

$$\forall n \in \mathbb{N},\, a_n \leq x \leq b_n,$$

et donc

$$0 \leq x - a_n \leq b_n - a_n \text{ et } 0 \leq b_n - x \leq b_n - a_n.$$

5°) $\Rightarrow$ 1°)

Soit A une partie de $\mathbb{K}$ majorée. On note $Maj(A)$ l'ensemble des majorants de A. Par récurrence et par dichotomie, on peut construire une suite $(I_n) = ([a_n, b_n])$ de cette façon :

– si $\dfrac{a_0 + b_0}{2}$ majore A, on pose $(a_1, b_1) = (a_0, \dfrac{a_0 + b_0}{2})$;

– sinon il existe $a_1 \geq \dfrac{a_0 + b_0}{2}$, $a_1 \in A$, on pose $b_1 = b_0$ et on obtient $(a_1, b_1) \in A \times Maj(A)$.

Ensuite par récurrence, on obtient une suite $(I_n) = ([a_n, b_n])$ telle que

$$b_n - a_n \leq 2^{-n}(b - a) \to 0 \text{ quand } n \to \infty.$$

Par ailleurs, on a :

$$\forall n,\, (a_n, b_n) \in A \times Maj(A) \text{ et } \bigcap_n I_n = \{s\} \text{ avec } s = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Vérifions que s est la borne supérieure de A :

– soit $a \in A$: $\forall n$, $a \leq b_n$, donc par passage à la limite $a \leq s$ et s majore A ;

– soit b un majorant de A, alors $\forall n$, $a_n \leq b$, donc par passage à la limite $s \leq b$ et s est bien le plus petit des majorants de A.

Théorème (d'Eudoxe)

i) Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif totalement ordonné archimédien,

$$\theta : \mathbb{Q} \to \mathbb{K}, p/q \mapsto (p.1_{\mathbb{K}})(q.1_{\mathbb{K}})^{-1}$$

le morphisme déjà introduit, et (r_n) une suite de rationnels. Alors :

$(\theta(r_n))$ converge vers 0 (resp. est de Cauchy) dans $\mathbb{K} \Leftrightarrow (r_n)$ converge vers 0 (resp. est de Cauchy) dans $\mathbb{Q}$.

ii) Soient $\mathbb{K}_1$ et $\mathbb{K}_2$ deux corps commutatifs totalement ordonnés admettant l'axiome de la borne supérieure, alors $\mathbb{K}_1$ et $\mathbb{K}_2$ sont isomorphes.

Démonstration

i) L'implication est immédiate. Pour la réciproque, utiliser pour$\varepsilon \in \mathbb{K}^{+*}$ l'existence de $\varepsilon' \in \mathbb{Q}^{+*}$ tel que

$$0 < \theta(\varepsilon') < \varepsilon.$$

ii) On dispose des morphismes injectifs de corps

$$\theta_1 : \mathbb{Q} \to \mathbb{K}_1 \text{ et } \theta_2 : \mathbb{Q} \to \mathbb{K}_2 \text{ définie par } \theta_i : \frac{p}{q} \mapsto (p.1_K)(q.1_K)^{-1} \in \mathbb{K}_i.$$

On construit une application $\mu : \mathbb{K}_1 \to \mathbb{K}_2$ de la façon suivante :

− $x \in \mathbb{K}_1$, $x = \lim_{n\to\infty} \theta_1(r_n)$ puisque tout élément de $\mathbb{K}_i$ est limite d'une suite de rationnels et on peut identifier r_n et $\theta_1(r_n)$.

− $\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \theta_2(r_n)$.

L'application ainsi définie est bien un morphisme d'anneaux puisque θ_i en sont. Il nous reste à vérifier deux choses :

• Existence de $\mu(x)$

$$\begin{array}{ll} & (\theta_1(r_n)) \text{ converge dans } \mathbb{K}_1 \\ \Rightarrow & (\theta_1(r_n)) \text{ est de Cauchy dans } \mathbb{K}_1 \\ \Rightarrow & (r_n) \text{ est de Cauchy dans } \mathbb{Q} \\ \Rightarrow & (\theta_2(r_n)) \text{ est de Cauchy dans } \mathbb{K}_2 \\ \Rightarrow & (\theta_2(r_n)) \text{ converge dans } \mathbb{K}_2. \end{array}$$

• Indépendance du représentant

si $x = \lim_{n\to\infty} \theta_1(r_n) = \lim_{n\to\infty} \theta_1(s_n)$, on a :

$$\begin{array}{ll} & (\theta_1(r_n - s_n)) \text{ converge vers 0 dans } \mathbb{K}_1 \\ \Rightarrow & (r_n - s_n) \text{ converge vers 0 dans } \mathbb{Q} \\ \Rightarrow & (\theta_2(r_n - s_n)) \text{ converge vers 0 dans } \mathbb{K}_2 \\ \Rightarrow & \lim_{n\to\infty} \theta_2(r_n) = \lim_{n\to\infty} \theta_2(s_n). \end{array}$$

De même, on construit un autre morphisme $\gamma : \mathbb{K}_2 \to \mathbb{K}_1$ par

$$\forall y = \lim_{n\to\infty} \theta_2(r_n),\ \gamma(y) = \lim_{n\to\infty} \theta_1(r_n).$$

On vérifie que

$$\gamma \circ \mu = Id(\mathbb{K}_1) \text{ et } \mu \circ \gamma = Id(\mathbb{K}_2).$$

B) $\mathbb{R}$ à l'aide des suites de Cauchy

On doit montrer maintenant l'existence d'un corps commutatif totalement ordonné admettant l'axiome de la borne supérieure.

Définition

☐ Une suite de nombres rationnels est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Q}$. On note $(u_n)_{n\geq 0}$ une telle suite. Par extension, nous aurons parfois à considérer des suites tronquées (u_n) dont le terme général n'est défini qu'à partir d'une certaine valeur de n_0, soit pour $n \geq n_0$: s'il est nécessaire, nous pouvons les compléter en posant $u_n = 0$ pour $n < n_0$.

☐ Une suite de rationnels (u_n) est dite croissante si

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1}.$$

Elle est dite croissante strictement si

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n < u_{n+1}.$$

☐ Elle est dite décroissante si

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq u_{n+1}.$$

Elle est dite décroissante strictement si

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n > u_{n+1.}$$

☐ Elle est monotone lorsqu'elle est croissante ou décroissante.

Si elle n'est pas monotone, on dit qu'elle est stationnaire. Dans ce cas, il existe n_0 tel que l'on ait $u_n = u_{n_0}$ pour tout $n \geq n_0$.

☐ Une suite de rationnels (u_n) est dite convergentes vers $\ell \in \mathbb{Q}$, si pour tout $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*$, il existe un entier naturel p tel que

$$\forall n, n > p \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

Le nombre ℓ est appelé limite de la suite (u_n) lorsque n tend vers l'infini. Sans ambiguïté, on peut écrire

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \ell.$$

☐ On dit que la suite (u_n) est de Cauchy dans $\mathbb{Q}$ si, quel que soit $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon \in \mathbb{Q}$), il existe un entier $n(\varepsilon)$ tel que les inégalités $n > n(\varepsilon)$ et $p > n(\varepsilon)$ entraînent

$$|u_n - u_p| < \varepsilon.$$

☐ L'ensemble des suites de Cauchy dans $\mathbb{Q}$ est noté $\mathcal{C}(\mathbb{Q})$.

☐ Un corps est dit complet si toute suite de Cauchy est convergente.

☐ Nous notons $\mathcal{C}_0 = \{x_n \ / \ \lim x_n = 0\}$.

Propriété

1°) La limite ℓ d'une suite (u_n) est unique.

2°) Si la suite (u_n) tend vers zéro, et si la suite (v_n) est bornée, alors la suite $(u_n v_n)$ tend vers zéro.

3°) Si la suite (u_n) tend vers a, si la suite (v_n) tend vers b, alors la suite

- $(u_n + v_n)$ tend vers $(a + b)$;

- la suite $(u_n - v_n)$ tend vers $(a-b)$;
- la suite $(u_n v_n)$ tend vers (ab).

Preuve

1°) Supposons b un deuxième rationnel possédant la propriété suivante :

$$\text{pour tout entier } n > p, \text{ on ait } |u_n - b| < \varepsilon, \ \forall \varepsilon > 0.$$

On peut écrire

$$\ell - b = \ell - u_n + u_n - b.$$

L'inégalité triangulaire donne :

$$|\ell - b| \leq |\ell - u_n| + |u_n - b|.$$

Par hypothèse, pour tout rationnel strictement positif ε, il existe un entier naturel n_0 tel que si n est supérieur à n_0,

$$|u_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

De même, il existe un entier naturel n_1 tel que si $n \geq n_1$,

$$|u_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

Prenons $n = \sup\{n_0, n_1\}$, nous obtenons $|\ell - b| \leq 2\varepsilon$, ce qui implique

$$\ell = b.$$

2°) Soit $M \in \mathbb{Q}$ tel que l'on ait

$$|v_n| \leq M \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Le nombre $\varepsilon > 0$ étant donné, il existe un entier $n(\varepsilon)$ tel que l'inégalité $n > n(\varepsilon)$ entraîne

$$|u_n| < \frac{\varepsilon}{M},$$

d'où

$$|u_n v_n| < \varepsilon.$$

3°) $\forall \varepsilon > 0$ $(\varepsilon \in \mathbb{Q})$, il existe un entier $n(\varepsilon)$ tel que, pour tout $n > n(\varepsilon)$, on ait à la fois

$$|u_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ et } |v_n - b| < \tfrac{\varepsilon}{2},$$

d'où

$$|u_n + v_n - (a+b)| < \varepsilon,$$

ce qui montre que la suite $(u_n + v_n)$ tend vers $(a+b)$.

On démontrerait de même que la suite $(u_n - v_n)$ tend vers $(a-b)$.

On a d'autre part :

$$u_n v_n - ab = (u_n - a)v_n + a(v_n - b).$$

Les suites $(u_n - a)$ et $(v_n - b)$ convergent vers zéro, et la suite (v_n) est bornée. Il en résulte que chacune des suites définies par

$$u'_n = (u_n - a)\, v_n \text{ et } v'_n = a\,(v_n - b)$$

tend vers zéro ; et la première partie de la démonstration montre que la suite

$$(u_n v_n - ab) = u'_n + v'_n$$

tend vers zéro.

Propriété

1°) Dans $\mathbb{Q}$, toute suite convergente est de Cauchy. On verra que la réciproque est fausse.

2°) Toute suite de Cauchy est bornée.

3°) Si les suites (u_n) et (v_n) sont de Cauchy, les suites $(u_n + v_n)$, $(u_n - v_n)$ et $(u_n v_n)$ sont de Cauchy.

4°) Soit (u_n) une suite de Cauchy ne convergeant pas vers zéro. Alors il existe un entier n_0 tel que, pour tout $n > n_0$, on ait $u_n \neq 0$, et la suite $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)$ définie pour $n > n_0$ est de Cauchy.

Preuve

1°) Supposons que u_n converge vers ℓ. Alors

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n(\varepsilon)\ /\ n > n(\varepsilon) \Rightarrow |u_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Les deux inégalités $n > n(\varepsilon)$ et $p > n(\varepsilon)$ implique

$$|u_n - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2} \text{ et } |u_p - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

d'où

$$|u_n - u_p| < \varepsilon.$$

La suite (u_n) est de Cauchy.

2°) Supposons que la suite (u_n) est de Cauchy. Alors, il existe n_1 tel que

$$n > n_1 \Rightarrow |u_n - u_{n_1}| < 1.$$

La suite (u_n) est donc bornée à partir du rang n_1. Or on sait que, pour que la suite (u_n) soit bornée, il suffit qu'elle soit bornée à partir d'un certain rang. Donc la suite (u_n) est bornée.

3°) On a tout d'abord

$$|u_n + v_n - u_p - v_p| \leq |u_n - u_p| + |v_n - v_p|.$$

Si $\varepsilon > 0$ est donné, on peut choisir l'entier $n(\varepsilon)$ assez grand pour que les inégalités $n > n(\varepsilon)$ et $p > n$ entraînent à la fois

$$|u_n - u_p| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ et } |v_n - v_p| < \frac{\varepsilon}{2},$$

d'où

$$|u_n + v_n - u_p - v_p| < \varepsilon,$$

cela prouve que la suite $(u_n + v_n)$ est de Cauchy.

On établirait de même que la suite $(u_n - v_n)$ est de Cauchy.

D'autre part,

$$|u_n v_n - u_p v_p| \leq |(u_n - v_p)v_p| + |u_p(v_n - v_p)|.$$

Or toute suite de Cauchy est bornée, alors il existe un rationnel M tel que

$$|u_n| \leq M \text{ et } |v_n| \leq M.$$

Le nombre $\varepsilon > 0$ étant donné, il existe un entier $n(\varepsilon)$ tel que $n > n(\varepsilon)$ et $p > n(\varepsilon)$ entraînent à la fois

$$|u_n - u_p| < \frac{\varepsilon}{2M} \text{ et } |v_n - v_p| < \frac{\varepsilon}{2M},$$

d'où

$$|u_n v_n - u_p v_p| < \varepsilon.$$

La suite $(u_n v_n)$ est de Cauchy.

4°) Le fait que la suite (u_n) ne tend pas vers zéro se traduit par :

$$\exists \alpha \in \mathbb{Q},\ \alpha > 0,\ \forall v \in \mathbb{N} \ /\ n > v,\ |u_n| \geq \alpha \ (1).$$

En langage courant, il existe un nombre $\alpha > 0$ et des valeurs de n aussi grandes qu'on le veut telles que $|u_n| \geq \alpha$. La suite (u_n) étant de Cauchy, il existe un entier n_0 tel que les inégalités $n > n_0$ et $p > n_0$ entraînent

$$|u_n - u_p| \leq \frac{\alpha}{2}.$$

En prenant $v = n_0$ dans (1), on voit qu'il existe un entier n satisfaisant à la fois à $n > n_0$ et $|u_n| \geq \alpha$. Avec cette valeur de n, et pour tout entier $p > n_0$, on a

$$|u_n - u_p| \leq \frac{\alpha}{2}$$

et

$$|u_n| \geq \alpha,$$

donc

$$|u_p| > \frac{\alpha}{2}$$

d'après l'inégalité triangulaire, d'où $u_p \neq 0$ pour $p > n_0$. De plus, quels que soient p, $q > n_0$, on a

$$|u_p| > \frac{\alpha}{2},\ |u_q| > \frac{\alpha}{2},$$

d'où

$$\left|\frac{1}{u_q} - \frac{1}{u_p}\right| < \frac{4}{\alpha^{\ 2}} \cdot |u_p - u_q|$$

et puisque la suite (u_p) est de Cauchy, on en déduit que la suite $\left(\frac{1}{u_p}\right)$, définie pour $p > n_0$, est aussi de Cauchy.

Propriété

| Le corps $\mathbb{Q}$ n'est pas complet.

Preuve

Posons

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!},\ y_n = x_n + \frac{1}{n \cdot n!},\ n \in \mathbb{N}^*.$$

On vérifie facilement que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$x_n < x_{n+1},\ y_{n+1} < y_n \text{ et } 0 < y_n - x_n < \frac{1}{n}.$$

Soit $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*$. Le corps $\mathbb{Q}$ étant archimédien, on voit qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$|y_n - x_n| \leq \varepsilon \text{ dès que } n \geq n_0.$$

Pour $n \geq p \geq n_0$, on a alors

$$x_p \leq x_n \leq y_n \leq y_p,$$

donc

$$|x_n - x_p| \leq |x_p - y_p|,$$

et on a ainsi montré que (x_n) est une suite de Cauchy.

Supposons que (x_n) converge vers $a \in \mathbb{Q}$. S'il existe $m \geq 2$ tel que $x_m \geq a$, pour $n > m$, on obtient

$$x_n - a \geq x_{m+1} - a = \alpha\ > 0.$$

C'est absurde puisque $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Procédant de manière analogue avec la suite (y_n), on parvient alors

$$x_n < a < y_n \text{ pour } n \geq 2.$$

Ecrivons $a = \dfrac{p}{q}$, avec $q \geq 2$, et $p \in \mathbb{Z}$. Il vient alors

$$q\,(q!)\,x_q < q\,(q!)\,a < q\,(q!)\,x_q + 1,$$

de la forme $n < m < n + 1$, avec $n,\ m \in \mathbb{N}$. Il y une contradiction.

La suite (x_n) est de Cauchy dans $\mathbb{Q}$, mais ne converge pas dans $\mathbb{Q}$.

Propriété

1°) Si nous définissons deux lois + et $\times$ sur $(\mathcal{C}(\mathbb{Q}), +, \times)$ de façon

$$x + y = (x_n + y_n) \text{ et } xy = (x_n y_n) \text{ avec } x = (x_n) \text{ et } y = (y_n),$$

alors $(\mathcal{C}(\mathbb{Q}), +, \times)$ est un anneau commutatif.

2°) Soit $\mathcal{C}_0 = \{x_n \ / \ \lim x_n = 0\}$ l'ensemble les suites qui convergent vers 0 dans $\mathbb{Q}$. Alors $(\mathcal{C}_0, +, \times)$ est un idéal de $(\mathcal{C}(\mathbb{Q}), +, \times)$.

Preuve

1°) D'après ce qui précède, les opérations $x + y$ et xy sont bien des lois internes sur $\mathcal{C}(\mathbb{Q})$ et qui font de $\mathcal{C}(\mathbb{Q})$ un anneau.

2°) Il est clair que $\mathcal{C}_0$ est non vide, car $\mathcal{C}_0$ contient la suite vide. Comme toute suite convergente est de Cauchy, on en déduit que $\mathcal{C}_0$ est une partie de $\mathcal{C}(\mathbb{Q})$, c'est même le noyau du morphisme $\varphi : (x_n) \mapsto \lim x_n$:

$$C_0 = \ker \varphi = \{x_n \in \mathcal{C}(\mathbb{Q}) \mid \varphi(x_n) = 0\}.$$

Ainsi, $\mathcal{C}_0$ est un sous-groupe additif de l'ensemble des suites convergentes $\mathcal{C}(Q)$. Comme toute suite rationnelles convergentes est de Cauchy, $\mathcal{C}_0$ est inclus dans $\mathcal{C}(\mathbb{Q})$. Soient $(x_n) \in \mathcal{C}_0$ et $(y_n) \in \mathcal{C}(Q)$. La suite (y_n), étant de Cauchy, est bornée, et (x_n) converge vers 0. On en déduit que $(x_n y_n) \in J$. Donc $\mathcal{C}_0$ est un idéal de $\mathcal{C}(\mathbb{Q})$, distinct de $\mathcal{C}(\mathbb{Q})$.

Propriété

1°) Considérons la relation $\Re$ suivante sur $\mathcal{C}(\mathbb{Q})$:

$$\forall x_n,\, y_n \in \mathcal{C}(\mathbb{Q}),\, x_n \Re y_n \Leftrightarrow x_n - y_n \in \mathcal{C}_0,$$

c'est-à-dire si la suite $(x_n - y_n)$ tend vers zéro.

Le relation $\Re$ ainsi définie est une relation d'équivalence sur $\mathcal{C}(\mathbb{Q})$ compatible avec les lois de $\mathcal{C}(\mathbb{Q})$ (cela signifie en fait que toute suite équivalente à une suite constante est convergente).

2°) L'anneau quotient $\mathcal{C}(\mathbb{Q})/\Re$ est un corps commutatif.

3°) On obtient un isomorphisme de $\mathbb{Q}$ sur un sous-corps de $\mathcal{C}(\mathbb{Q})/\Re$ en associant à chaque nombre rationnel q la classe $\mathcal{C}(q)$ constituée par les suites de Cauchy convergent vers q.

Preuve

1°) La relation binaire

$$\forall x,\, y \in \mathcal{C}(\mathbb{Q}),\, x \Re y \Leftrightarrow x - y \in \mathcal{C}_0,$$

est évidemment réflexive et symétrique. Sa transitivité est également évident car si $(x - y) \in \mathcal{C}_0$ et $(y - x) \in \mathcal{C}_0$, alors

$$(x - z) = (x - y) + (y - z) \in \mathcal{C}_0.$$

Pour montrer que la relation d'équivalence $\Re$ ainsi obtenue est compatible avec la structure algébrique de C, considérons quatre éléments x, y, x', y' de C satisfaisant à

$$x \Re x' \text{ et } y \Re y',$$

c'est-à-dire $(x - x') \in C_0$ et $(y - y') \in C_0$. On voit tout d'abord que

$$x + y - x' - y' = (x - x') + (y - y')$$

appartient à C_0, d'où

$$x + y = x' + y'.$$

Ainsi la relation $x\Re y$ est compatible avec l'addition de C.

On a d'autre part,

$$xy - x'y' = (x - x')y + x'(y - y')$$

et puisque C_0 est un idéal, la relation $(x - x') \in C_0$ entraîne $(x - x')y \in C_0$, tandis que la relation $(y - y') \in C_0$ entraîne $x'(y - y') \in C_0$. On en déduit que $(xy - x'y')$ appartient à C_0, soit $xy\Re x'y'$: la relation $x\Re y$ est compatible avec la multiplication dans $C(\mathbb{Q})$.

2°) L'étude de 1°) montre que les classes $\overline{x} + \overline{y}$ et $\overline{x} \cdot \overline{y}$ ne dépendent que des classes $\overline{x}$ et $\overline{y}$. On obtient donc deux lois internes sur l'espace quotient $C(\mathbb{Q})/\Re$ en posant

$$\overline{x} + \overline{y} = \overline{x + y} \text{ et } \overline{x} \cdot \overline{y} = \overline{x \cdot y}.$$

Ces propriétés se déduisent sans peine de celle de l'addition et de la multiplication dans $C(\mathbb{Q})$.

Remarquons que l'anneau $C/\Re$ admet pour unité la classe $\overline{u}$ constituée par les suites de Cauchy tendant vers 1. Soit alors $x = (x_n)$ une suite de Cauchy ne convergente pas vers zéro. On sait que $\left(\frac{1}{x_n}\right)$ est une suite de Cauchy et qu'elle est définie pour n assez grand. Si nous posons $y_n = 0$ pour $n \leq n_0$ et $y_n = \frac{1}{x_n}$, nous obtenons une suite de Cauchy $y = (y_n)$ telle que la suite $xy = (x_n y_n)$ converge vers 1. On a donc

$$\overline{x} \cdot \overline{y} = \overline{x \cdot y} = \overline{u},$$

ce qui montre que tout élément non nul $\overline{x}$ de $C/\Re$ a un inverse dans $C/\Re$ puisque la relation $\overline{x} \neq 0$ équivaut à $x \notin C_0$.

3°) A chaque rationnel q associons la classe d'équivalence $\overline{q}$ constituée par les suites de Cauchy convergent vers $\overline{q}$. On voit immédiatement que $\varphi : q \mapsto \overline{q}$ est un homomorphisme injectif de $\mathbb{Q}$ dans $C(\mathbb{Q})/\Re$, d'où il résulte que $\varphi(\mathbb{Q})$ est un sous-corps de $C(\mathbb{Q})/\Re$.

Théorème

1°) Soit (r_n) une suite de Cauchy de $\mathbb{Q}$ qui ne converge pas vers 0, alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*$ tels que

$$r_n \geq \varepsilon \text{ ou } r_n \leq \varepsilon, \text{ pour } n \geq n_0.$$

2°) $C(\mathbb{Q})/\Re$ est totalement ordonné.

3°) $C(\mathbb{Q})/\Re$ est archimédien.

4°) $\mathbb{Q}$ est dense dans $C(\mathbb{Q})/\Re$.

Démonstration

1°) Pour une suite (r_n) qui ne converge pas vers 0, on a par définition

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*, \forall N \in \mathbb{N}, \exists p \geq N, |r_p| \geq 2\varepsilon.$$

Comme (r_n) est de Cauchy, on a aussi

$$\exists N \in \mathbb{N},\, n,\, p \geq N \Rightarrow |r_n - r_p| \leq \varepsilon.$$

Si $r_p \geq 2\varepsilon$, alors

$$n \geq N \Rightarrow r_n \geq r_p - \varepsilon \geq \varepsilon.$$

Si $r_p \leq -2\varepsilon$, alors

$$n \geq N \Rightarrow r_n \leq r_p + \varepsilon \leq -\varepsilon.$$

2°) Montrons que $C(\mathbb{Q})/\Re$ est totalement ordonné. On sait que si une partie P de $C(\mathbb{Q})/\Re$ vérifie les trois conditions suivantes

i) $P + P \subset P$

ii) $P.P \subset P$

iii) $P \cap (-P) = \{0\}$,

alors la relation $\leq$ définie par

$$x \leq y \Leftrightarrow y - x \in P$$

est une relation d'ordre totale sur $C(\mathbb{Q})/\Re$, compatibles avec les lois de $C(\mathbb{Q})/\Re$. Considérons φ la surjection canonique de $C(\mathbb{Q})$ dans $C(\mathbb{Q})/\Re$, c'est un morphisme d'anneaux. Posons

$$C_+ = \{(r_n) \in C(\mathbb{Q}),\, r_n > 0 \text{ à partir d'un certain rang }\} \cup C_0 \text{ et } P = \varphi(C_+).$$

$*$ Comme $C_+.C_+ \subset C_+$, on a

$$\begin{array}{rcl} P.P & = & \varphi(C_+).\varphi(C_+) \\ & \subset & \varphi(C_+) = P. \end{array}$$

$*$ Ensuite, on a

$$C_+ + C_+ \subset C_+.$$

C'est facile de voir ça, sauf pour le cas où $(r_n) \in C_0$ et $(s_n) \in C_+ \backslash C_0$. La suite (s_n) est une suite de Cauchy qui ne converge pas vers 0. D'après 1°), on a :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N},\, \exists \varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*,\, n \geq n_0 \Rightarrow s_n \geq \varepsilon \text{ et } r_n > -\varepsilon.$$

Il vient donc

$$r_n + s_n > 0,\, n \geq n_0.$$

Calculons

$$\begin{array}{rcl} P + P & = & \varphi(C_+) + \varphi(C_+) \\ & = & \varphi(C_+ + C_+) \\ & \subset & \varphi(C_+) = P. \end{array}$$

$*$ Montrons que $P \cap \{-P\} = \{0\}$ par l'absurde. Soit $x \in P \cap \{-P\}$ avec $x \neq 0$. Il existe deux suites $(r_n) \in P$ et $(s_n) \in (-P)$ telles que

$$x = \varphi((r_n)) = \varphi((s_n)) \Rightarrow (r_n - s_n) \text{ tend vers } 0.$$

Or il existe N tel que pour $n \geq N$, on a

$$r_n \geq \varepsilon \text{ et } -s_n \geq \varepsilon.$$

Par addition, on obtient

$$\exists N,\, \forall n \geq N,\, r_n - s_n \geq 2\varepsilon.$$

C'est contradictoire avec le fait que $(r_n - s_n)$ tend vers 0. Donc $P \cap (-P) = \{0\}$.

$*$ Pour montrer que

$$P \cup (-P) = C(\mathbb{Q})/\Re,$$

il suffit de vérifier que P est complémentaire de $(-P)$ dans $C(\mathbb{Q})/\Re$. Soit x un élément qui n'appartient pas à P, alors il existe une suite qui n'est pas dans C_+ telle que

$$x = \varphi((r_n)) \in C(Q)/\Re \backslash \{0\}.$$

La suite (r_n) est une suite de Cauchy qui ne converge pas vers 0. On a donc

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*,\, \exists N \in \mathbb{N},\, n \geq N \Rightarrow r_n \leq -\varepsilon < 0.$$

Cela veut dire que x appartient à $(-P)$. Comme 0 appartient aussi à $P \cup (-P)$, on a

$$P \cup (-P) = C(\mathbb{Q})/\Re.$$

3°) Soit $x \in C(\mathbb{Q})/\Re$ avec $x > 0$. Il existe $(r_n) \in C(\mathbb{Q})$ tel que $x = \varphi((r_n))$. Etant de Cauchy dans $\mathbb{Q}$, la suite (r_n) est majorée par un rationnel, puis par un entier car $\mathbb{Q}$ est archimédien. On obtient donc

$$\begin{array}{rl} & p + 1 - r_n > 0 \\ \Rightarrow & \varphi(p+1) > \varphi((r_n)) \\ \Rightarrow & p \geq x. \end{array}$$

4°) Pour montrer que $\mathbb{Q}$ est dense dans $C(\mathbb{Q})/\Re$, il suffit de vérifier que tout $x \in C(\mathbb{Q})/\Re$ est limite d'une suite (r_n) de rationnels. On prendre (r_n) tel que $x = \varphi((r_n))$ où φ est la surjection canonique de $C(\mathbb{Q})$ dans $C(\mathbb{Q})/\Re$. L'application φ est un morphisme d'anneaux.

- Montrons d'abord que $|\varphi((r_n))| = \varphi((|r_n|))$.

$*$ Si $x = 0$, alors (r_n) est un élément de C_0 et l'égalité est immédiate.

$*$ Si $x > 0$, alors (r_n) est une suite de Cauchy qui ne tend pas vers 0. En utilisant 1°), on a

$$\exists n_0 \in \mathbb{N},\, \exists \varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*,\, n \geq n_0 \Rightarrow r_n \geq \varepsilon \text{ ou } r_n \leq -\varepsilon.$$

On ne peut pas avoir

$$\exists n_0 \in \mathbb{N},\, \exists \varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*,\, n \geq n_0 \Rightarrow r_n \leq -\varepsilon$$

car il existe également $(s_n) \in C_+ \backslash C_0$ tel que $x = \varphi((s_n))$. Dans ce cas, la suite $(r_n - s_n)$ tend vers 0. Comme $s_n > 0$ à partir d'un certain rang, on a

$$r_n - s_n \leq -\varepsilon - s_n < -\varepsilon$$

à partir d'un certain rang, ce qui contredit avec le fait que $(r_n - s_n)$ tend vers 0.

On n'a donc qu'un seul cas possible

$$\exists n_0 \in \mathbb{N},\, \exists \varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*,\, n \geq n_0 \Rightarrow r_n \geq \varepsilon,$$

soit encore

$$(r_n - |r_n|) \in C_0,$$

c'est-à-dire

$$\varphi((|r_n|)) = |\varphi((r_n))| = |x|.$$

$*$ Si $x < 0$, on refait le même raisonnement pour $-x$.

- Montrons ensuite que la suite (r_n) tend vers x. Soit $\varepsilon \in (C(\mathbb{R})/\Re)^*_+$. Comme $C(\mathbb{R})/\Re$ est archimédien, il existe $\varepsilon' \in \mathbb{Q}^*_+$ tel que

$$0 < \varepsilon' < \varepsilon.$$

Comme (r_n) est da Cauchy dans $\mathbb{Q}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$n,\, p \geq N \Rightarrow |r_n - r_p| < \varepsilon'.$$

On fixe $p \geq N$, on obtient

$$\begin{array}{rcl} |x - r_p| & = & |\varphi((r_n)) - \varphi((r_p))| \\ & = & |\varphi((r_n - r_p)_{n\geq 0}| \\ & = & \varphi((|r_n - r_p|)) \\ & \leq & \varphi(\varepsilon') \\ & < & \varepsilon. \end{array}$$

Donc $\mathbb{Q}$ est dense dans $C(\mathbb{Q})/\Re$.

Théorème

Il existe un unique corps commutatif totalement ordonné admettant l'axiome de la borne supérieure.

On le note $\mathbb{R}$ et on l'appelle le corps des réels.

Démonstration

Posons $\mathbb{R} = C(\mathbb{Q})/\Re$. D'après ce qu'on a dit sur les corps commutatif totalement ordonné, il suffit de vérifier que $\mathbb{R}$ est complet pour vérifier l'unicité et l'existence.

Soit (x_n) une suite de Cauchy de réels. On peut donc écrire

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}^*_+,\, \exists N \in \mathbb{N}^*,\, n,\, p \geq N \Rightarrow |x_n - x_p| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Pour $n \geq 1$ fixé, il existe une suite (r_n) de rationnels convergentes vers x_n, ce que l'on peut traduire formellementpar :

$$\exists r_n \in \mathbb{Q},\, |x_n - r_n| \leq \frac{1}{n}.$$

Pour $n,\, p \geq N$, on a

$$\begin{array}{rcl} |r_n - r_p| & = & |r_n - x_n + x_n - x_p + x_p - r_p| \\ & \leq & |r_n - x_n| + |x_n - x_p| + |x_p - r_p| \\ & \leq & \dfrac{1}{n} + \dfrac{\varepsilon}{3} + \dfrac{1}{p}. \end{array}$$

Comme $\mathbb{R}$ est archimédien, il existe N' tel que

$$N' \geq \max(\tfrac{3}{\varepsilon}, N).$$

Pour $n,\, p \geq N'$, on a

$$|r_n - r_p| \leq \varepsilon.$$

La suite (r_n) est donc de Cauchy dans $\mathbb{Q}$.

Posons $x = \varphi((r_n))$. Alors on sait que la suite (r_n) converge vers x dans $\mathbb{R}$. Pour tout entier n, calculons

$$\begin{array}{rcl} |x - x_n| & \leq & |x - r_n| + |r_n - x_n| \\ & \leq & |x - r_n| + \frac{1}{n}. \end{array}$$

La suite (x_n)converge donc vers x dans $\mathbb{R}$.

II) Topologie de $\mathbb{R}$

A) Borne sup, borne inf

Définition

☐ Rappelons que la borne supérieure d'une partie de $\mathbb{R}$ est le plus petit des majorants de cette partie.

☐ La borne inférieure d'une partie de $\mathbb{R}$ est le plus grand élément des majorants de cette partie.

☐ On appelle droite numérique achevée, que l'on note $\overline{\mathbb{R}}$, la réunion $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$ de $\mathbb{R}$ et de $\pm\infty$, totalement ordonnée en prolongeant l'ordre de $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}$, $-\infty < x < \infty$.

Propriété

On considère deux parties non vides A et B de $\mathbb{R}$.

1°) Si $A \subset B$ et si B est majorée, alors A est majorée et $\sup A \leq \sup B$.

2°) Si $A \subset B$ et si B est minorée, alors A est minorée et $\inf A \geq \inf B$.

3°) A est majorée si et seulement si $(-A)$ est minorée et $\inf(-A) = -\sup A$.

4°) Pour tout $a \in \mathbb{R}$ et toute partie A de $\mathbb{R}$,

$$A \text{ majorée} \Rightarrow \sup(a + A) = a + \sup A,$$

$$A \text{ minorée} \Rightarrow \inf(a + A) = a + \inf A.$$

Théorème

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes.

i- $m = \sup A$

ii- m majore A et, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \in A$ tel que $m - \varepsilon < x \leq m$.

Théorème

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

i- $m = \inf A$

ii- m minore A et, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \in A$ tel que $m \leq x < m + \varepsilon$.

B) Ensembles ouvertes , ensembles fermés et ensembles connexes.

Définition

☐ L'intervalle ouvert de centre a, de longueur $2r$, se nomme boule ouverte de centre a et de rayon

r. On le note :

$$B(a,r) =]a-r, a+r[= \{x \in \mathbb{R}, \mathrm{d}(a,y) < r\}.$$

☐ Une boule fermée de centre a et de rayon r est l'ensemble :

$$\overline{B}(a,r) = [a-r, a+r] = \{x \in \mathbb{R}, \mathrm{d}(a,x) \leq r\}.$$

☐ Soit A une partie de $\mathbb{R}$, on appelle diamètre de A le réel

$$\mathrm{diam}(A) = \sup(A) - \inf(A).$$

☐ Pour tout point $a \in \mathbb{R}$, on appelle voisinage de a toute partie de $\mathbb{R}$ contenant une boule ouverte de centre a. On note $V(a)$ l'ensemble des voisinages de a dans $\mathbb{R}$. Formellement, V est voisinage de a si et seulement si :

$$\exists r \in \mathbb{R}^{+*} |]a-r, a+r[\subset V.$$

☐ Une fonction f est dite avoir une propriété P au voisinage d'un point a s'il existe $V \in V(a)$ tel que la restriction de f à V a la propriété P.

☐ Une partie B de $V(x)$ est dite une base de voisinage de x si tout voisinage de x contient un élément de B ($V(x)$ est l'ensemble des voisinages de x).

☐ On appelle ensemble ouvert toute partie A de $\mathbb{R}$ qui est un voisinage de chacun de ses points. Formellement, A est une partie ouverte si et seulement si

$$\forall x \in A,\, A \in V(x) \Leftrightarrow \forall x \in A,\, \exists r \in \mathbb{R}_+^*,\, B(x,r) \subset A.$$

☐ On appelle ensemble fermé le complémentaire dans $\mathbb{R}$ d'un ensemble ouvert. Si F est un ensemble fermé, on dit aussi que F est un fermé de $\mathbb{R}$.

☐ On dit qu'un ensemble M est connexe si les seuls sous ensembles à la fois ouvert et fermés de M sont M et $\emptyset$. On dit que $A \subset M$ est une partie connexe de M si le sous espace métrique A de M est connexe.

Exemple

☐ Si $x \in \mathbb{R}$, $\{]x-\varepsilon, x+\varepsilon[, \varepsilon > 0\}$ est une base de voisinage de x.

Propriété

1) La réunion d'une famille quelconque de voisinages de a est voisinage de a.

2) L'intersection d'une famille finie de voisinage de a est un voisinage de a.

On traduit ces deux propriété en disant que $V(a)$ est stable par réunion et par intersection finie.

Preuve

1°) Soit $(V_\lambda)_{\lambda \in l}$ une famille de voisinage de a et posons $V = \bigcup_{\lambda \in l} V_\lambda$. Pour un λ fixé quelconque dans L, il existe, puisque V_λ est un voisinage de a, une boule ouverte $B(a,r) \subset V_\lambda$ et par suite $B(a,r) \subset V$. Donc V est voisinage de a.

2°) Soit (V_λ) avec $\lambda \in \{1, 2, ..., n\}$ une famille finie de voisinages de A et posons $V = \bigcap_{1 \leq \lambda \leq n} V_\lambda$. Pour tout indice λ, il existe $r_\lambda > 0$ tel que $B(a, r_\lambda) \subset V_\lambda$ et par conséquent $\bigcap_{1 \leq \lambda \leq n} B(a; r_\lambda) \subset V$. Posons

$$r = \min\{r_1, r_2, ..., r_n\}.$$

On a $r > 0$ et l'intersection précédente est la boule ouverte $B(a, r) \subset V$. Donc V est un voisinage de a. D'où le théorème.

Propriété

> $\mathbb{R}$ et $\emptyset$ sont ouverts et fermés. Ils sont donc connexes.

Preuve

Montrons tout d'abord que $\mathbb{R}$ est ouvert. Pour $a \in \mathbb{R}$, fixons $\varepsilon = 1$, alors

$$]a - 1, a + 1[\subset \mathbb{R}.$$

Donc $\mathbb{R}$ est ouvert. Pour montrer que $\mathbb{R}$ est fermé, on peut montrer que $\emptyset$ est ouvert. $\emptyset$ est évidemment ouvert, puisque que toute propriété, commençant par $\forall a \in \emptyset$, est vraie . Donc, $\forall a \in \emptyset$, $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$ est vraie (on peut même écrire $\forall x \in \emptyset$, $1 + 1 = 0$). Comme $\mathbb{R}$ est ouvert, $\emptyset$ est fermé.

Si un ensemble $A \subset \mathbb{R}$ est à la fois ouvert et fermé, avec $A \neq \emptyset$ et $A \neq \mathbb{R}$, il en est de même de son complémentaire A^c. Soit $a \in A^c$, chacun des intervalles fermés dans $\mathbb{R}$, $]-\infty, a]$ et $[a, +\infty[$ rencontre A suivant un fermé qui ne contient pas a. Soit par exemple

$$B = A \cap] - \infty, a].$$

Ce fermé dans $\mathbb{R}$ contient sa borne supérieure s, mais B est également ouvert dans A et dans $\mathbb{R}$, comme intersection des deux ouverts A et $]-m, a]$, il contient donc un intervalle ouvert de centre s, ce qui est contradictoire.

Propriété

> Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction. Les propriétés suivantes sont équivalentes :
>
> - f est continue
>
> - pour tout ouvert Ω de $\mathbb{R}$, $f^{-1}(\Omega)$ est un ouvert relatif de A
>
> - pour tout fermé F de $\mathbb{R}$, $f^{-1}(F)$ est un fermé relatif de F.

Théorème

> o1) La réunion d'une famille quelconque d'ensembles ouverts est un ensemble ouvert. L'ensemble vide et $\mathbb{R}$ sont ouverts.
>
> o2) L'intersection d'une famille finie d'ensembles ouverts est un ensemble ouvert.
>
> o3) L'intersection d'une famille quelconque d'ensembles fermés est un ensemble fermé.
>
> o4) La réunion d'une famille finie d'ensembles fermés est un ensemble fermé.

On ne donne pas les preuves pour les deux propriétés précédents. On le fera dans le cours sur la topologie générale.

Lorsqu'un ensemble quelconque E, vérifie o1, o2, o3, on dit qu'on a défini sur E une topologie. Munie de cette topologie, E est un espace topologique.

La démonstration de ces propriétés se déduisent des propriété correspondantes des voisinages.

C) Intérieur et adhérence

Définition

☐ On dit qu'un point $a \in \mathbb{R}$ est un point intérieur à A s'il existe une boule ouverte de centre a incluse dans A, ce qui revient à dire que a est intérieur à A si A est voisinage de a.

☐ L'ensemble des points intérieurs à A se nomme intérieur de A et se note $\overset{\circ}{A}$.

☐ Lorsque a est intérieur au complémentaire $\mathbb{R} - A$ de A, on dit que a est extérieur à A.

☐ L'intérieur de $\mathbb{R} - A$ se nomme l'extérieur de A.

☐ On dit qu'un point $a \in \mathbb{R}$ est adhérent à A si tout voisinage de a rencontre A.

☐ L'ensemble de tous les points adhérents à A se nomme adhérence de A et se note $\overline{A}$.

Formellement pour que x soit adhérent à A, il suffit d'avoir

$$\forall V \in V(x) \Rightarrow V \cap A \neq \emptyset.$$

Propriété

1°) Si $A \subset B$, alors

$$\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}.$$

2°) Soit A une partie de $\mathbb{R}$. L'intérieur de A est la réunion des ouverts contenus dans A : c'est le plus grand ouvert contenu dans A. En particulier, pour avoir $A = \overset{\circ}{A}$, il faut et il suffit que A si un ensemble ouvert.

Preuve

1°) Si $a \in \overset{\circ}{A}$, alors A est voisinage de a. B qui contient A est aussi voisinage de a et $a \in \overset{\circ}{B}$, d'où

$$\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}.$$

2°) Par définition, on a

$$\overset{\circ}{A} \subset A.$$

Si A est ouvert, il est voisinage de chacun de ses points, donc tout x de A est intérieur à A, d'où

$$A = \overset{\circ}{A}.$$

Pour tout partie A, montrons que $\overset{\circ}{A}$ est ouvert. Soit $x \in \overset{\circ}{A}$, alors par définition il existe une boule ouverte $B(x, r)$ inclus dans A. Comme $B(x, r) \subset A$, il vient

$$\overset{\circ}{B}(x, r)$$

Mais $\overset{\circ}{B}(x, r) = B(x, r)$ car $B(x, r)$ est ouvert. Donc

$$B(x, r) \subset \overset{\circ}{A}.$$

Maintenant, pour tout partie A, montrons que $\overset{\circ}{A}$ est le plus grand ouvert contenu dans A. Soit O un ouvert contenu dans A. Alors, pour $x \in O$, il existe une boule ouverte $B(x,r)$ inclus dans O. Comme

$$O \subset A,$$

il vient

$$B(x,r) \subset A.$$

C'est-à-dire que x appartient à $\overset{\circ}{A}$ et donc $O \subset \overset{\circ}{A}$.

3°) Un point $a \in \mathbb{R}$ n'est pas adhérent à A s'il existe un voisinage de a ne rencontrant pas A, c'est-à-dire inclus dans le complémentaire $\mathbb{R} - A$ de A.

L'ensemble des points non adhérent à A est donc l'intérieur de $\mathbb{R} - A$, c'est-à-dire l'extérieur de A, par suite $\overline{A}$ est fermée.

Propriété

1°) Pour tout partie A de $\mathbb{R}$, l'adhérence $\overline{A}$ est le complémentaire de l'extérieur de A :

$$\mathbb{R} - \overline{A} = \overset{\circ}{\overbrace{\mathbb{R} - A}}.$$

Cette formule montre que $\overline{A}$ est un fermé.

On a également

$$\mathbb{R} - \overset{\circ}{A} = \overline{\mathbb{R} - A}.$$

2°) L'adhérence de A est l'intersection des fermés contenant A : c'est le plus petit fermé contenant A.

3°) En particulier, pour avoir $A = \overline{A}$, il faut et il suffit que A soit un ensemble fermé.

On a bien entendu

$$A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}.$$

Preuve

1°) Un point $x \in \mathbb{R}$ n'est pas adhérent à A s'il existe un voisinage de x ne rencontrant pas A, c'est-à-dire inclus dans le complémentaire $(\mathbb{R} - A)$ de A. L'ensemble des points non adhérents à A est donc l'intérieur de $(\mathbb{R} - A)$, c'est-à-dire l'extérieur de A. Par suite, $\overline{A}$ est fermée.

Maintenant, posons $A = \mathbb{R} - B$ dans la formule $\mathbb{R} - \overline{A} = \overset{\circ}{\overbrace{\mathbb{R} - A}}$. Il vient immédiatement

$$(\mathbb{R} - \overline{\mathbb{R} - B}) = \overset{\circ}{B}.$$

Par passage au complémentaire, on obtient bien

$$\overline{\mathbb{R} - B} = \mathbb{R} - \overset{\circ}{B}.$$

2°) Montrons que $\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A. Par définition, on a

$$A \subset \overline{A}.$$

Soit F un fermé tel que $A \subset F$. Alors, on a

$$\mathbb{R} - F \subset \mathbb{R} - A.$$

Comme $(\mathbb{R} - F)$ est ouvert, on a également

$$(\mathbb{R} - F) \subset \overbrace{\mathbb{R} - A}^{\circ}.$$

Or d'après 1°), on sait que

$$\overbrace{\mathbb{R} - A}^{\circ} = \mathbb{R} - \overline{A}.$$

Par passage au complémentaire, on obtient

$$\overline{A} \subset F.$$

3°) $\forall A \subset \mathbb{R}$, on a évidemment $A \subset \overline{A}$.

Si $A = \overline{A}$ alors A est fermé.

Réciproquement, si A est fermé, alors $\mathbb{R} - A$ est ouvert et coïncide avec son intérieur, c'est-à-dire avec l'extérieur de A qui est $\mathbb{R} - \overline{A}$, donc $A = \overline{A}$.

Soit $a \in \overline{A}$, alors tout voisinage de a rencontre A, donc rencontre B puisque $A \subset B$. Par suite, $a \in \overline{B}$. Donc $\overline{A} \subset \overline{B}$ si $A \subset B$.

Corollaire

1°) $\mathring{\mathring{A}} = \mathring{A}$, $\mathring{A} \cap \mathring{B} = \overbrace{A \cap B}^{\circ}$, $\mathring{A} \cup \mathring{B} \subset \overbrace{A \cup B}^{\circ}$

2°) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$, $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cup B}$.

Preuve

1°) On sait que $\mathring{A}$ est ouvert et contenu dans A. On a donc

$$\mathring{A} \subset A \subset B.$$

Comme $\mathring{B}$ est le plus grand ouvert contenu dans B, il est clair que $\mathring{A} \subset \mathring{B}$.

Il est clair que :

$$\mathring{A} \subset A \text{ et } \mathring{B} \subset B \Rightarrow \mathring{A} \cap \mathring{B} \subset A \cap B.$$

$\mathring{A} \cap \mathring{B}$ est ouvert comme intersection d'ouverts. Comme $\overbrace{A \cap B}^{\circ}$ est le plus grand ouvert contenu dans $A \cap B$, on a

$$\mathring{A} \cap \mathring{B} \subset \overbrace{A \cap B}^{\circ}.$$

Réciproquement,

$$A \cap B \subset A \Rightarrow \overbrace{A \cap B}^{\circ} \subset \overset{\circ}{A}$$
$$A \cap B \subset B \Rightarrow \overbrace{A \cap B}^{\circ} \subset \overset{\circ}{B}.$$

$\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$ est ouvert inclus dans $A \cup B$, comme réunion de deux ouverts. $\overbrace{A \cup B}^{\circ}$ est le plus grand ouvert contenu dans $A \cup B$, donc $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subset \overbrace{A\cup}^{\circ}$.
Cette inclusion est en général stricte. Prenons un exemple avec $A = [1, 2]$ et $B = [2, 3]$. Alors

$$\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} =]1, 2[\cup]2, 3[\text{ et } \overbrace{A \cup B}^{\circ} =]1, 3[.$$

2°) $\overline{A} \cup \overline{B}$ est un fermé qui contient $A \cup B$. Or $\overline{A \cup B}$ est le plus petit fermé qui contient $A \cup B$. Donc on a

$$\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Réciproquement, on a en outre

$$A \subset A \cup B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{A \cup B}$$
$$B \subset A \cup B \Rightarrow \overline{B} \subset \overline{A \cup B},$$

d'où

$$\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}.$$

Finalement, on obtient bien

$$\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cup B}.$$

$\overline{A} \cup \overline{B}$ est un fermé qui contient $A \cap B$. On sait que $\overline{A \cap B}$ est le plus petit fermé contenant $A \cap B$. Donc

$$\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Propriété (caractérisation de la borne sup et inf)

Soit A une partie non vide de la droite réelle $\mathbb{R}$.
1°) Si A est majorée, alors $m = \sup A$ si, et seulement si, m majore A et $m \in \overline{A}$.
2°) Si A est minorée, alors $m = \inf A$ si, et seulement si, m minore A et $m \in \overline{A}$.

Preuve

Montrons la première assertion. La deuxième assertion est laissée au soin du lecteur.

Nécessité

Soit $m = \sup A$. Alors m majore A et toute boule ouverte de centre m rencontre A. En effet, s'il existait $\varepsilon > 0$ tel que $]m - \varepsilon, m + \varepsilon[\cap A = \emptyset$ alors, pour tout $x \in A$, on aurait

$$x \leq m - \varepsilon$$

et m ne serait pas le plus petit des majorants de A.

Suffisante

Si $m \in \overline{A}$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, $]m-\varepsilon, m+\varepsilon[\cap A \neq \emptyset$. Si de plus m majore A, il ne peut alors exister de majorant p de A vérifiant $p < m$. En effet, pour tout $p < m$, en prenant $\varepsilon = m - p > 0$; la relation précédente montre qu'il existe $x \in A$, avec $x > m - \varepsilon = p$ et p n'est pas majorant de A.

D) Vocabulaire supplémentaire et compacité

Définition

☐ On appelle frontière de A la partie $Fr(A)$ de $\mathbb{R}$ définie par $Fr(A) = \overline{A} - \overset{\circ}{A}$. Les éléments de $Fr(A)$ sont appelés les points frontières de A.

☐ Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On dit que A est dense dans $\mathbb{R}$ si $\overline{A} = \mathbb{R}$.

☐ Soient $x \in \mathbb{R}$, on dit que x est un point isolé de A si et seulement si $\exists r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $B(x,r) \cap A = \{x\}$.

☐ Soit $a \in \mathbb{R}$. On dit que a est un point d'accumulation de A dans $\mathbb{R}$ si et seulement si

$$\forall V \in V(a),\ (V \cap A) - \{x\} \neq \emptyset.$$

Cela revient à dire que a est un point d'accumulation pour un ensemble E de $\mathbb{R}$ si chaque voisinage de a contient une infinité de point de E.

☐ Soit A une partie quelconque de $\mathbb{R}$. On appelle recouvrement de A toute famille $(B_h)_{h \in L}$ de partie de $\mathbb{R}$ dont la réunion contient A : $A \subset \bigcup\limits_{h \in L} B_h$.

Si L est fini, on dit que le recouvrement est fini. Si tous les B_h sont ouverts dans E, on dit que le recouvrement est ouvert.

☐ On dit qu'une partie A de $\mathbb{R}$ est compacte si de tout recouvrement ouvert de A, on peut en extraire un recouvrement fini de A.

☐ Un point $x_0 \in A$ est dit isolé s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que : $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\cap A = \{x_0\}$.

☐ Si tous les points de A sont isolés, A est un ensemble discret.

Remarque

Un point d'accumulation de A est un point d'adhérence A, mais la réciproque est fausse.

Exemple

Par exemple, l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels admet chaque point de $\mathbb{R}$ pour point d'accumulation car entre deux nombres réels quelconques, il y a toujours une infinité de nombres rationnels. Donc, les points d'accumulation d'un ensemble n'appartient pas nécessairement à cet ensemble.

Théorème (de Borel-Lebesgue)

Pour qu'une partie A de $\mathbb{R}$ soit compacte, il faut et il suffit qu'elle soit fermée et bornée.

Démonstration

- Montrons tout d'abord que toute compacte de $\mathbb{R}$ est bornée. On obtient un recouvrement ouvert de A en considérant, pour tout $x \in A$, une boule ouverte $B(x, r_x)$ de centre x, de rayon choisi arbitrairement. Alors $(B(x, r_x))_{x\in A}$ est un recouvrement ouvert de A dans $\mathbb{R}$. Si A est compact, on peut en extraire un recouvrement fini $A \subset \bigcup\limits_{1\leq i\leq n} .B(x_i, r_i)$ Or chacune des n boules est bornée ; la réunion de ces n boules est donc bornée et comme elle contient A, alors A est elle-même bornée.

- Montrons que toute partie compacte de $\mathbb{R}$ est fermée. Soit $a \in \mathbb{R} - A$. Alors, pour tout $x \in A$, on a

$$|x - a| \neq a.$$

Considérons les nombres strictement positifs

$$p_x = \frac{1}{2}|x - a|.$$

On a évidemment

$$B(x; p_x) \cap B(a; p_x) = \emptyset.$$

Si A est compact, du recouvrement ouvert $(B(x; p_x))_{x\in A}$ de A, on peut extraire un recouvrement fini $(B(x_i; p_i))_{1\leq i\leq n}$ de A et $B(x_i; p_i) \cap B(a; p_i) = \emptyset$. Remarquons que

$$\bigcap_{1\leq i\leq n} B(a; p_i) = B(a; p)$$

avec $p = \min\{p_1, p_2, ..., p_n\}$. Cette boule ouverte $B(a, p)$ est disjointe de toutes les boules $B(x_i, p_i)$ qui constituent un recouvrement ouvert de A ; par conséquent $B(a, p) \subset \mathbb{R} - A$. Donc $\mathbb{R} - A$ est ouvert et par suite A est fermé.

- La condition nécessaire est vue. Prouvons qu'elle suffit. Soit A un ensemble fermé et borné de la droite numérique $\mathbb{R}$. A est inclus dans l'intervalle $I_0 = [a, b]$ avec $a = \inf A$ et $b = \sup A$. Soit $(O_h)_{h\in L}$ un recouvrement ouvert quelconque de A. Supposons que l'on ne puisse pas en extraire un recouvrement fini de A et montrons que l'on abouti à une contradiction. Alors l'un des deux ensembles non vides $A \cap \left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ et $A \cap \left[\frac{a+b}{2}, b\right]$ ne peut être recouvert par un nombre finie des ouverts O_k. Désignons par I_1 l'intervalle correspondant. Par ce procédé de dichotomie, on construit une suite

$$... \subset I_n \quad \subset ... \subset I_1 \subset I_0$$

d'intervalles emboîtés tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble non vide $A \cap I_n$ ne peut être recouvert par un nombre fini des ouverts O_k. Il existe un nombre $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha = \bigcap\limits_{n\in N} I_n$. Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intervalle I_n rencontre A, donc α appartient à l'adhérence de A et comme A est fermé, $\alpha \in \overline{A} = A$. Il existe, par conséquent, $h \in L$ tel que $\alpha \in O_h$. Or, pour ce voisinage ouvert O_h de α, il existe un rang r tel que $n > r \Rightarrow I_n \subset O_h$, O_h à lui tout seul recouvre I_n, donc $I_n \cap A$, contradiction.

Théorème (des segments emboîtés)

| L'intersection d'une suite décroissante de parties compactes non vides de $\mathbb{R}$ est non vide.

Démonstration

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de parties compactes non vides de $\mathbb{R}$,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ A_{n+1} \subset A_n.$$

On va démontrer que $\bigcap_{n\in N} A_n \neq \emptyset$. Supposons le contraire et montrons que l'on aboutit à une contradiction. Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, A_n est fermé, son complémentaire $(\mathbb{R} - A_n)$ est ouvert. Si l'intersection des A_n était vide, la famille des complémentaires $(\mathbb{R} - A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ serait un recouvrement ouvert de $\mathbb{R}$ donc de A_0. Comme A_0 est compact, on pourrait en extraire un recouvrement fini de A_0 :

$$A_0 \subset (\mathbb{R} - A_{n_1}) \cup (\mathbb{R} - A_{n_2}) \cup \cdots \cup (\mathbb{R} - A_{n_n}).$$

En passant aux complémentaires, on en déduirait

$$A_{n_1} \cap A_{n_2} \cap \cdots \cap A_{n_n}.$$

Or si l'on pose $m = \underset{1\leq k\leq r}{max}\{n_k\}$, l'intersection du premier membre est A_n puisque la suite (A_n) est décroissante. On aurait alors $A_n \subset (\mathbb{R} - A_0)$ qui contredit $A_m \subset A_0$.

Illustrons une application du théorème des segments emboîtés en montrant le théorème de Baire :

Théorème (de Baire)

| Si $(V_n)_n$ une suite d'ouverts denses dans $\mathbb{R}$, alors $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n$ est aussi dense dans $\mathbb{R}$ et en particulier non vide.

Démonstration

Soit I un intervalle ouvert quelconque de $\mathbb{R}$, on veut montrer que $I \cap (\bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n) \neq \varnothing$. Comme V_0 est dense dans $\mathbb{R}$, on a : $I \cap V_0 \neq \varnothing$. Comme $I \cap V_0$ est ouvert, il contient un intervalle ouvert qui contient lui-même un intervalle I_0 fermé et borné, donc compact. On recommence le même raisonnement avec V_2 et l'intervalle ouvert $\overline{I_0}$. On obtient un compact I_1 tel que $I_1 \subset I_0$. On construit ainsi par récurrence une suite (I_n) décroissante de parties compactes non vides de $\mathbb{R}$. D'après le théorème des segments emboîtés, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ est non vide. Il existe alors un $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ qui est élément de $I \cap V_n$ pour chaque n., donc $x \in I \cap (\bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n)$ et on a bien $I \cap (\bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n) \neq \varnothing$.

Exemple

☐ Utilisons le théorème de Baire pour montrer que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

Si $\mathbb{R}$ est dénombrable, on peut représenter ses éléments par des suites (x_n). Posons $V_n = \mathbb{R} - \{x_n\}$. Comme un singleton est fermé dans $\mathbb{R}$, la suite (V_n) est une suite d'ouverts dense dans $\mathbb{R}$. D'après le théorème de Baire, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n$ est non vide. Mais on a :

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}0} (\mathbb{R} - \{x_n\}) = \mathbb{R} - (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{x_n\}) = \mathbb{R} - \mathbb{R} = \varnothing.$$

Là c'est contradictoire, donc $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

□ Par passage au complémentaire du théorème de Baire, on a : si (F_n) est une suite de fermés d'intérieur vides de $\mathbb{R}$, alors $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ est d'intérieur vide.

□ Soit f une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to+\infty} f(nx) = 0$. On montrera plus tard que : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

III) Utilisation des suites

A) Caractérisation avec des suites

Définition

□ Un nombre réel appelé valeur d'adhérence de la suite (u_n) si pour tout $\varepsilon > 0$, l'intervalle $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ contient une infinité de termes de la suite.

Formellement, x est valeur d'adhérence de (u_n) si pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $n_0 \in \mathbb{N}$, il existe $n \geq n_0$ tel que

$$|u_n - x| \leq \varepsilon.$$

Remarque

On peut remarquer que si la suite (u_n) converge, alors elle a une seule valeur d'adhérence, mais la réciproque est fausse.

Théorème (caractérisation des valeurs d'adhérence)

1°) Le nombre réel x est valeur d'adhérence de la suite (u_n) si et seulement s'il existe une suite extraite de (u_n) de limite x.

2°) Une suite bornée admet au moins une valeur d'adhérence. Autrement dit, de toute suite bornée de réels, on peut extraire une sous-suite convergente.

3°) Une suite bornée admettant une seule valeur d'adhérence est convergente.

Démonstration

1°) Supposons qu'il existe une suite extraite $(u_{\varphi(n)})$de limite x, alors pour tout $\varepsilon > 0$, l'intervalle $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ contient une infinité de termes de la suite $(u_{\varphi(n)})$ donc une infinité de termes de la suite (u_n) : x est donc valeur d'adhérence de (u_n).

Réciproquement, si x est valeur d'adhérence de (u_n), il s'agit de construire $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(u_{\varphi(n)})$ ait pour limite x. Cette construction se fait par récurrence. Posons $\varphi(0) = 0$ et supposons que l'on ait réussi à définir φ strictement croissante sur $\{0, 1, 2, ..., n\}$ de façon que $|x - u_{\varphi(p)}| \leq 1/p$ pour tout $1 \leq p \leq n$. Puisque x est valeur d'adhérence de (u_n), il existe $N \geq \varphi(n) + 1$ tel que $|x - u_N| \leq 1/(n+1)$: nous posons donc $\varphi(n+1) = N$. φ est donc définie et strictement croissante sur $\{0, 1, 2, ..., n+1\}$ de façon que : $|x - u_{\varphi(p)}| \leq 1/p$ pour tout $1 \leq p \leq n+1$. Par récurrence, nous avons donc défini $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $|x - u_{\varphi(n)}| \leq 1/n$ pour tout $n \geq 1$, donc $\lim_{n\to\infty} u_{\varphi(n)} = x$.

2°) Soit (u_n) une suite bornée, nous lui associons la suite (v_n) définie par $v_n = \sup u_p$ pour $p \geq n$. Cette suite (v_n) est décroissante et minorée donc admet une limite λ.

Soit $\varepsilon > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$, puisque $\lim_{n\to\infty} v_n = \lambda$, il existe $n \geq n_0$ tel que

$$\lambda \leq v_n \leq \lambda + \varepsilon.$$

Comme $v_n = \sup u_p$ pour $p \geq n$, $v_n - \varepsilon$ n'est pas majorant de $\{u_p, p \geq n\}$, il existe $p \geq n$ tel que $v_n - \varepsilon < u_p \leq v_n$ et donc

$$\lambda - \varepsilon < u_p < \lambda + \varepsilon.$$

Finalement, il existe $p \geq n_0$ tel que $|u_p - \lambda| < \varepsilon$ c'est-à-dire que λ est valeur d'adhérence de (u_n).

3°) Soit une suite bornée (u_n) ayant une seule valeur d'adhérence λ et supposons qu'elle ne converge pas vers λ : il existe donc $\varepsilon > 0$ tel qu'une infinité de termes de la suite (u_n) soit hors de $]\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon[$. Nous pouvons donc extraire une suite ne prenant aucune valeur dans $]\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon[$, cette suite étant bornée admet une valeur d'adhérence $x \neq \lambda$ qui est valeur d'adhérence de (u_n), ce qui est contradictoire.

Le théorème suivant permet également de définir les parties ouvertes et les parties fermées de $\mathbb{R}$.

Théorème

1) Soit (u_n) une suite réelle, λ un point et B une base de voisinage de λ. La suite (u_n) tend vers λ quand n tend vers $+\infty$ si et seulement si pour tout voisinage $V \in B$, $u_n \in V$ à partir d'un certain rang, c'est-à-dire si à tout voisinage $V \in B$, on peut associer $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \in V$ pour tout $n \geq n_0$.

2°) Si V est un ouvert et (u_n) une suite de limite $\lambda \in V$, alors $u_n \in V$ à partir d'un certain rang.

3°) Une partie F de $\mathbb{R}$ est un fermé si et seulement si toute suite convergente d'éléments de F a sa limite dans F.

Démonstration

1°) Nous allons démontrer dans le cas où $\lambda \in \mathbb{R}$, les autres cas étant similaires. Supposons que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lambda$ et soit $V \in B$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$]\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon[\subset V,$$

donc $|u_n - \lambda| < \varepsilon$ à partir d'un certain rang d'où

$$u_n \in]\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon[\subset V$$

à partir d'un certain rang.

Réciproquement, soit $\varepsilon > 0$, comme B est une base de voisinage de λ il existe $V \in B$ tel que

$$V \subset]\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon[,$$

$u_n \in V$ à partir d'un certain rang donc $|u_n - \lambda| < \varepsilon$ à partir d'un certain rang c'est-à-dire

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lambda.$$

2°) On sait que la suite (u_n) tend vers λ quand n tend vers $+\infty$ si et seulement si pour tout voisinage $W \in B$ (B est une base de voisinage de λ), $u_n \in W$ à partir d'un certain rang. Lorsque V est un ouvert et $\lambda \in V$, alors V est un voisinage de λ. On a immédiatement le résultat.

3°) Supposons que F soit fermé et soit (u_n) une suite d'éléments de F de limite λ. Il est clair que l'on a

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} | \forall n \geq n_0 \Rightarrow \mathrm{d}(u_n, \lambda) < \varepsilon.$$

En particulier, on peut prendre $\varepsilon = \dfrac{1}{n}$.

Comme F est fermé, on a $\overline{F} = F$. Or on sait que

$$\overline{F} = \{x \in \mathbb{R} |\ \mathrm{d}(x, F) = 0\}.$$

Donc pour montrer que $\lambda \in F$, il suffit de vérifier que $\lambda \in \overline{F}$, c'est-à-dire que $\mathrm{d}(\lambda, F) = 0$. Et bien calculons

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{d}(\lambda, F) & \leq & \mathrm{d}(\lambda, u_n) + \mathrm{d}(u_n, F) \\ & \leq & \varepsilon + \mathrm{d}(u_n, F). \end{array}$$

Comme $u_n \in F$, on a $\mathrm{d}(u_n, F) = 0$. En faisant tendre n vers l'infini, on obtient bien $\mathrm{d}(\lambda, F) = 0$. Donc $\lambda \in F$.

Réciproquement, on suppose que toute suite convergente d'éléments de F a sa limite dans F. Par l'absurde, supposons que F ne soit pas fermé. Alors, F^c n'est pas un ouvert, donc il existe $\lambda \notin F$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$, $]\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon[\not\subset F^c$, c'est-à-dire

$$]\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon[\cap F \neq \emptyset.$$

Pour $\varepsilon = \dfrac{1}{n}$, il existe donc un élément noté u_n appartenant à $]\lambda - \frac{1}{n}, \lambda + \frac{1}{n}[$, ce qui définit une suite (u_n) d'éléments de F de limite $\lambda \notin F$. C'est absurde, d'où F fermé.

Théorème (de Bolzano-Weierstrass)

> Une partie A de $\mathbb{R}$ est compacte si et seulement toute suite d'éléments de A possède une valeur d'adhérence dans A.

Démonstration

On sait que tout partie compacte A de $\mathbb{R}$ est fermé et borné. Soit (u_n) une suite d'éléments de A. La suite (u_n) est bornée donc admet au moins une valeur d'adhérence λ. A est fermé et $(u_{\varphi(n)})$ est une suite d'éléments de A, donc $\lambda \in A$, donc (u_n) a une valeur d'adhérence.

Réciproquement, soit A une partie vérifiant cette propriété et (u_n) une suite d'éléments de A convergente de limite λ. (u_n) a une valeur d'adhérence dans A qui est donc λ, donc $\lambda \in A$. Donc A est fermée. Supposons que A ne soit pas bornée par exemple non majorée, nous construisons alors une suite d'éléments de A de limite $+\infty$ (car, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A \cap]n, +\infty[\neq \emptyset$), une telle suite n'a pas de valeur d'adhérence, donc A est bornée.

Remarque

D'un point de vue pratique pour montrer que $a \in \overline{A}$, il suffit de construire une suite (u_n) d'éléments de A convergente vers a.

Si en plus cette suite est injective, alors a est un point d'accumulation de A.

Exemple

□ Déterminons les points d'accumulation de l'ensemble

$$A = \{\frac{1}{p} + \frac{1}{q}, (p, q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*\}.$$

La suite $n \mapsto \frac{1}{n} + \frac{1}{n}$ est injective et convergente vers 0 qui est alors un point d'accumulation.

De même, $n \mapsto \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{n}$ est une suite injective convergente vers $\frac{1}{p}$, donc les points de forme $\frac{1}{p}$ sont des points d'accumulation.

Il n'y en a pas d'autre. Pour voir ça, considérons une suite injective quelconque (x_n) de A, alors elle aura la forme : $x_n = \dfrac{1}{f(n)} + \dfrac{1}{g(n)}$ avec f et g des fonctions de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$. On a deux cas à considérer :

- Si f et g ne sont pas bornées, alors $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$;

- Si parmi f et g l'une et une seule soit bornée, on peut supposer par exemple f. Dans ce cas l'ensemble $\{f(n), n \in \mathbb{N}\} = \{p_1, ..., _k\}$ est fini. Il existe un i tel que l'ensemble $A_i = \{n \in \mathbb{N}, f(n) = p_i\}$ soit infini sinon $\mathbb{N}$ serait fini. Par exemple, supposons que A_j est un tel ensemble et considérons la suite $h_f(n)$ extraite de $f(n)$ définie par :

$$h_f(1) = \inf\{n \in N, f(n) = p_j\},\ h_f(2) = \inf\{n \in N, n > h_f(1) \text{ et } f(n) = p_j\},\ ...,$$
$$h_f(m) = \{n \in \mathbb{N}, n > h(m-1) \text{ et } f(n) = p_j\}.$$

On construit de même une suite h_g extrait de g. Alors considérons la suite $n \mapsto \dfrac{1}{h_f(n)} + \dfrac{1}{h_g(n)} = \dfrac{1}{p_j} + \dfrac{1}{h_g(n)}$. A cause de l'injectivité, $\frac{1}{h_g(n)}$ tend vers 0 et $\dfrac{1}{h_f(n)} + \dfrac{1}{h_g(n)}$ tend vers $\dfrac{1}{p_j}$.

- Si f et g sont à la fois bornées, il y a contradiction car la même construction au précédent montre qu'on peut en extraire un suite constant $\dfrac{1}{p_j} + \dfrac{1}{q_j}$. Il y a contradiction avec l'injectivité de (x_n).

B) Conséquences

Propriété

$\mathbb{R}$ et $\emptyset$ sont à la fois fermés et ouverts.

Preuve

Montrons que $\mathbb{R}$ est ouvert. Pour cela, il suffit de montrer que $\emptyset$ est fermé. Puisqu'il n'y a aucune suite (a_n) de $\emptyset$, la définition est automatiquement vérifiée.

Montrons que $\mathbb{R}$ est fermé. Soit (a_n) une suite de réel convergente vers un réel λ. Le fait que $\lambda \in \mathbb{R}$ est évident.

Comme $\mathbb{R}$ est fermé, $\emptyset$ est ouvert.

Propriété

1°) $]a, b[$ est ouvert, non fermé.

2°) $[a, b]$ est fermé, mais n'est pas ouvert.

Preuve

1°) Regardons son complémentaire $]-\infty, a] \cup [b, \infty[$ et montrons qu'il est fermé. Pour x fixé, montrons que $]-\infty, a]$ et $[b, \infty[$ sont chacun fermé. Faisons les détails pour $]-\infty, a]$. Soit (u_n)

une suite de réels de $]-\infty, a]$, supposé convergente dans $\mathbb{R}$ vers une limite l. On a pour chaque n, $u_n \leq a$. Par passage à la limite, $l \leq a$ donc $l \in]-\infty, a]$. Donc $]-\infty, a]$ est fermé.

Idem pour $[b, +\infty[$. Donc $]-\infty, a] \cup [b, \infty[$ est fermé car c'est une union finie de fermés.

Montrons que $]a, b[$ n'est pas fermé. Posons $u_n = a + \frac{1}{n}$. Pour n suffisamment grand, $u_n \in]a, b[$. La suite (u_n) est dans $]a, b[$, mais converge dans $\mathbb{R}$ vers $a \notin]a, b]$.

2°) On a

$$[a, b] =]-\infty, b] \cap [a, +\infty[.$$

Comme $]-\infty, b]$ et $[a, +\infty[$ sont fermés, donc $[a, b]$ est fermé. $[a, b]$ n'est pas ouvert puisque son complémentaire $\overline{[a, b]} =]-\infty, a] \cup]b, +\infty]$ n'est pas fermé. Posons $u_n = a - \frac{1}{n}$, cette suite est à valeur dans $\overline{[a, b]}$, mais converge vers a n'appartenant pas à $\overline{[a, b]}$.

Propriété

1°) Les ensembles $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ sont fermés et non ouverts. On a $\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$ et $\mathring{\mathbb{Z}} = \emptyset$.

2°) $\mathbb{Q}$ n'est ni ouvert ni fermé.

Preuve

Par ailleurs, on a

$$\mathbb{N} = \mathbb{Z} \cap [0, +\infty[.$$

C'est l'intersection de deux parties fermés, donc $\mathbb{N}$ est fermé.

$\mathbb{Z}$ et $\mathbb{N}$ ne sont pas ouverts. En effet, posons $u_n = \dfrac{1}{n}$ pour $n \geq 1$. Cette suite a des valeurs qui ne sont pas dans $\mathbb{Z}$, mais qui converge vers $0 \in \mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$. On en déduit que $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{N}$ ne sont pas ouverts.

Comme $\mathbb{Z}$ est fermé, on $\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$. Pour montrer que $\mathring{Z} = \emptyset$, il suffit de montrer que $\overline{\mathbb{Z}^c} = \mathbb{R}$. On a

$$\mathbb{Z}^c = \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{Z}}]n, n+1]}.$$

Montrons que c'est $\mathbb{R}$ tout entier. Il est clair que $\mathbb{R}$ est fermé contenant $A = \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{Z}}]n, n+1]}$. Montrons que c'est le plus petit. Soit F un fermé contenant A. Il faut montrer que $\mathbb{R} = F$. Il suffit que tous les $n \in F$. Mais

$$\lim_{p \to \infty} \left(n + \frac{1}{p} \right) = n,$$

donc

$$\overline{\mathbb{Z}^c} = \mathbb{R},$$

donc

$$\mathring{\mathbb{Z}} = \emptyset.$$

2°) Montrons que $\mathbb{Q}$ n'est pasfermé.Considérons lasuite $(1+\frac{1}{n})^n$ qui converge vers e. Comme $(1+\frac{1}{n})^n \in \mathbb{Q}$ et $e \notin \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}$ n'est pas ouvert.

Pour montrer que $\mathbb{Q}$ n'est pas ouvert, on peut considérer la suite $(1+\frac{1}{n})^n - e$ qui converge vers 0. Comme $((1+\frac{1}{n})^n - e) \notin \mathbb{Q}$ et $0 \in \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}$ n'est pas ouvert.

Propriété

1°) Les compacts de $\mathbb{R}$ sont à la fois fermées et bornées.

2°) Soit A une partie compact de $\mathbb{R}$. Si F est un fermé de A, alors F est aussi compact.

Preuve

1°) Soit A un compact de $\mathbb{R}$.

- Pour montrer que A est fermé, on peut vérifier que $\overline{A} \subset A$. Soit $x \in \overline{A}$. C'est un point adhérent à A, il existe donc une suite (x_n) de points de A convergente vers x. Comme A est compact, la suite (x_n) admet une suite extraite convergente dans A. Mais toutes les suites extraites de (x_n) ont le même limite x. Donc $x \in A$.

- Montrons que A est bornée par l'absurde. Supposons que A est non bornée. Alors il existe une suite (x_n) de A tel que : $|x_n| \geq n$.

Une sous-suite de (x_n), n'étant pas bornée, ne pourrait jamais converger, ce qui prouve que A n'est pas compact, donc absurde.

Réciproquement, soit A une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}$. Toute suite (x_n) de A est bornée. On peut donc extraire de (x_n) une sous-suite convergente dans A car A est fermée. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, A est compact.

2°) Soit A une partie compact de $\mathbb{R}$ et F une partie fermé de A. Comme A est un fermé de $\mathbb{R}$, il est clair que F est également un fermé de $\mathbb{R}$.
Soit (x_n) une suite de F. C'est également une suite de A.Comme A est compact,on peut extraire de (x_n) une sous-suite convergente dans A. Cette limite est également dans F car F est fermée.

Les suites numériques

Une suite c'est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$. De nombreux phénomènes de la vie courant peuvent être modélisés à l'aide de suite. Nous pensons par exemple au nombre de sonnerie d'une pendule, à l'augmentation d'un capital d'un livret d'épargne logement ou de l'augmentation de la population en fonction des années.

La résolution de ces problèmes ont souvent donné au cours de l'histoire des paradoxes parce qu'à ces époques on n'avait qu'une concept intuitive de l'infini. Proclus (450 après JC) en remarquant que tout diamètre divisant un cercle en deux moitiés, il devrait y avoir deux fois plus de moitiés que de diamètres. Avec le même raisonnement, Zénon affirmait qu'une flèche ne pouvait atteindre sa cible. C'est la notion de convergence des suites qui fait intervenir l'idée de l'infini. Il nous faut donc poser les questions suivantes : quand dit-on qu'une suite est convergente ? Comment montre-t-on que a^n tend vers 0 quand n tend vers ∞, pour $|a| < 1$? On s'intéressera aussi au lien monotonie et convergence des suites. L'intérêt d'une telle étude est de nous fournit une base solide pour ne pas faire des raisonnements erronés.

L'importance des suites provient aussi du fait que les problèmes topologique dans les espaces métriques peuvent être parfaitement traités à l'aide de suites. On n'oublie pas que les suites permettent de donner des approximations de certains nombres. Archimède prouve que :

$$3 + \frac{10}{71} < \pi < \frac{22}{7}.$$

On a déjà donné toutes les propriétés importantes sur les réels dans le chapitre précédent. Mais c'était un chapitre à titre culturel. On remontre rapidement ici les propriétés importantes à connaître par cœur.

I) Les nombres réels

A) Les propriétés des réels

Etudions tout d'abord les propriétés générales des corps totalement ordonnés.

Définition-Rappel

☐ On appelle corps des réels et on note $(\mathbb{R}, +, \times, \leq)$ tout corps commutatif totalement ordonné admettant l'axiome de la borne supérieure : toute partie majoré non vide de $\mathbb{R}$, admet une borne supérieure.

☐ On définit $|x| = \max\{x, -x\}$.

☐ On définit un segment $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$.

☐ Une partie I de $\mathbb{R}$ est appelé un intervalle si :

$$\forall a,\, b \in I,\, a < x < b \Rightarrow x \in I.$$

Remarque

On démontre que deux corps totalement ordonnés vérifiant la propriété de la borne supérieure sont isomorphes. On démontre aussi qu'un tel corps existe et contient $\mathbb{Q}$.

Exemple

□ $\mathbb{Z}$ possède la propriété de la borne supérieure puisque toute partie non vide et majorée de $\mathbb{Z}$ admet un maximum, donc une borne supérieure.

□ Soit E un ensemble non vide. $(\mathcal{P}(E), \subset)$ possède la propriété de la borne supérieure.

□ $\mathbb{Q}$ n'admet pas la propriété de la borne supérieure.

Propriété (conséquences immédiates)

1°) Si $x \geq 0$, alors $-x \leq 0$.

2°) Si $x \leq y$ et $x' \leq y'$, alors $x + x \leq x + y' \leq y + y'$.

3°) Si $x \leq y$ et $a \geq 0$, alors $ax \leq ay$.

Preuve

1°) Le fait que l'addition est compatible avec $\leq$, on a

$$(x > 0 \text{ et } y > 0) \Rightarrow x + y > 0.$$

Par l'absurde si $-x > 0$, alors $x + (-x) > 0$, ce qui implique $0 > 0$. C'est absurde.

2°) C'est clair, il suffit de faire une différence.

3°) Le fait que l'addition et la multiplication sont compatibles avec $\leq$, on a

$$(x > 0 \text{ et } y > 0) \Rightarrow (x + y > 0 \text{ et } xy > 0).$$

Comme $x \leq y$, on a : $0 \leq y - x$. Dans ce cas, $a(y - x) \geq 0$, c'est-à-dire $ax \leq ay$.

Propriété

1°) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

2°) $|xy| = |x|.|y|$.

3°) $|x + y| \leq |x| + |y|$.

4°) $|x - y| \geq ||x| - |y||$.

5°) $|x + y| \geq ||x| - |y||$.

Preuve

1°) Si $x \geq 0$, alors on a : $|x| = x$, donc $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Si $x \leq 0$, alors : $|x| = 0 \Leftrightarrow -x = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

2°) Supposons que $x \geq 0$. Alors on peut voir le produit $|xy|$ selon que y est positif ou négatif :

− si $y > 0$, alors $|xy| = xy = |x|.|y|$.

− si $y < 0$, alors $|xy| = -xy = |x|.|y|$.

Lorsque x est négatif, on se ramène au cas précédent en remarquant que $|-x| = |x|$.

3°) Le fait que $x \leq |x|$ et $y \leq |y|$, implique $x + y \leq |x| + |y|$. De même, on a

$$(-x \leq |x| \text{ et } -y \leq |y|) \Rightarrow -x - y \leq |x| + |y|.$$

On a donc

$$\max\{x+y, -x-y\} \leq |x| + |y|$$

C'est-à-dire

$$|x+y| \leq |x| + |y|.$$

4°) Ecrivons

$$|x| = |x-y+y| \leq |x-y| + |y|.$$

Donc

$$|x| - |y| \leq |x-y|.$$

De même, on a aussi

$$|y| - |x| \leq |y-x| = |x-y|.$$

Finalement, on obtient

$$\max\{|y| - |x|, -(|x| - |y|)\} \leq |x-y|,$$

Soit encore

$$||x| - |y|| \leq |x-y|.$$

5°) Là, il n'y a rien à prouver.

Remarque

1°) Si $x \in \mathbb{R}$, on a : $-|x| \leq x \leq |x|$.

2°) Si $y \geq 0$, alors : $-y \leq x \leq y \Leftrightarrow |x| \leq y$.

Théorème (d'Archimède)

1°) Pour tout réel a et b strictement positif, il existe un naturel n tel que : $na > b$.

2°) Pour tout nombres réels a et b strictement supérieur à 1, il existe un naturel n tel que : $a^n > b$.

Preuve

1°) On va raisonner par l'absurde. S'il n'existe pas d'entier naturel n tel $na > b$, alors on aurait : $\forall n$, $na \leq b$. Posons $A = \{na \mid n \in \mathbb{N}\}$. Comme A est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée par b, A possède une borne supérieure s. Or pour $n \in \mathbb{N}$, on a : $(n+1)a \in A$ et $(n+1)a \leq s$. Il vient alors : $na \leq s-a$. Donc $(s-a)$ est un majorant de A. Mais comme $a > 0$, $s-a < s$. Là, il y a contradiction avec le fait que s est le plus petit majorant de A.

2°) Soit $a > 1$. Alors il existe un réel $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que : $a = 1 + \alpha$.

De même, il existe $\beta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $b = 1 + \beta$. Calculons alors

$$a^n = (1+\alpha)^n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k \alpha^k = 1 + n\alpha + \sum_{k=2}^{n} \mathrm{C}_n^k \alpha^k.$$

Mais on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \alpha^n \geq 1 + n\alpha \text{ (on le prouve par récurrence).}$$

Or d'après 1°), il existe n_0 tel que : $n_0\alpha > \beta \Rightarrow 1 + n_0\alpha > 1 + \beta$. Mais $a^{n_0} > 1 + n_0\alpha > 1 + \beta = b$.

Théorème

1°) Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont de la forme : $\emptyset$; $\{a\}$; $]a, +\infty[$; $[a, +\infty[$; $]-\infty, b[$; $]a, b[$; $[a, b]$; $[a, b[$; $\mathbb{R}$.

2°) Etant donné a et b deux réels et un réel c, les deux assertions suivantes sont équivalentes :

i- c est élément de $[a, b]$

ii- il existe $t \in [0, 1]$ tel que : $c = ta + (1 - t)b$.

Preuve

1°) Montrons tout d'abord qu'un intervalle I n'a ni majorant, ni minorant est $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$, alors il existe b et a dans I tel que $b > x > a$. Comme I est un intervalle, il est clair que $x \in I$. Donc $\mathbb{R} \subset I$. L'autre inclusion $I \subset \mathbb{R}$ est toujours vraie. Donc $I = \mathbb{R}$.

Montrons maintenant que si un intervalle I a un minorant, mais pas de majorant, alors il est de la forme $[a, +\infty[$ ou de la forme $]a, +\infty[$. I, étant minorée, possède une borne inférieure a.

Dans le cas où a est un élément I, considérons un réel x tel que $x > a$. Il existe alors $b \in I$ tel que $x < b$. Comme I est un intervalle, il est clair que $x \in I$. Dans ce cas, on a : $I = [a, +\infty[$.

Dans le cas où a n'appartient pas à I, alors a est le plus grand minorant de I. Soit un réel $x > a$, alors x n'est pas un minorant de I. Dans ce cas, il existe $a' \in I$ tel que : $a' < x$. Comme I n'est pas majoré, il existe $b \in I$ tel que $b > x$. On a donc : $a' < x < b$ et $x \in I$. Dans ce cas là, on a : $I =]a, +\infty[$.

Pour les autres ensembles, il est clair que ce sont des intervalles.

2°) Pour montrer que i- implique ii-, il suffit de poser $t = \frac{b-c}{b-a}$. On a bien alors

$$c = ta + (1 - t)b.$$

On a aussi : $a < c < b \Rightarrow 0 < b - c < b - a$, puis : $0 < t < 1$.

Pour montrer que ii- implique i-, il suffit d'écrire :

$$c = a + (1 - t)(b - a) = b - t(b - a).$$

Comme $0 < t < 1$, la première écriture de c entraîne $a < c$, et la seconde entraîne $c < b$.

Remarque

Ceci est faux dans $\mathbb{Q}$. Prenons par exemple $I_n = [a_n, b_n]$ avec a_n (resp. b_n) une approximation à 10^{-4} près par défaut (resp. par excès) de $\sqrt{2}$. On peut donc définir :

$$a_n = \frac{c}{10^n} \text{ et } b_n = \frac{c'}{10^n} \text{ avec } c = \max\left\{d \in \mathbb{N} \mid \left(\frac{d}{10}\right)^2 < 2\right\} \text{ et } c' = \min\left\{d \in \mathbb{N} \mid \left(\frac{d}{10}\right)^2 > 2\right\}.$$

On a :

$$[a_n, b_n]_{\mathbb{Q}} = \{x \in \mathbb{Q} \mid a_n \leq x \leq b_n\} \text{ et } \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n]_{\mathbb{Q}} = \emptyset.$$

Théorème (caractérisation de la borne sup)

Pour que M soit la borne supérieur d'une partie E de $\mathbb{R}$, il faut et il suffit que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in E \Rightarrow M - \varepsilon < x \leq M.$$

Preuve

Soit M la borne supérieure de E. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, $M - \varepsilon$ n'est pas un majorant de E car sinon $M \leq M - \varepsilon$ car M est le plus petit des majorant. Comme $M - \varepsilon$ n'est pas un majorant de E, il existe $x \in E$ tel que :

$$M - \varepsilon < x \leq M.$$

Réciproquement, supposons : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x \in E \Rightarrow M - \varepsilon < x \leq M$. Montrons que $M = \sup E$. L'inégalité $x \leq M$ exprime que M est majorant. D'autre part, l'inégalité $x > M - \varepsilon$ exprime que $M - \varepsilon$ n'est pas majorant quelque soit $\varepsilon > 0$. Cela revient à dire que M est le plus petit majorant. En effet, supposons que M' soit le plus petit des majorants, c'est-à-dire $M' \leq M$. Posons $\varepsilon = M - M'$, alors

$$x > M - \varepsilon = M - M + M' = M' \Rightarrow \text{ce qui est absurde.}$$

B) Partie entière et approximation

Définition

☐ Soit X une partie de $\mathbb{R}$. On dit que X est dense dans $\mathbb{R}$ lorsqu'on a :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists x \in X, |a - x| < \varepsilon.$$

☐ On appelle sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ toute partie G de $\mathbb{R}$ contenant 0 et vérifiant : $\forall (x, y) \in G^2$, $(x - y) \in G$.

☐ Un sous-groupe additif $(G, +)$ est qualifié de discret lorsqu'il existe $a \in \mathbb{R}_+$ tel que : $G = a\mathbb{Z}$.

☐ Un sous-groupe additif $(G, +)$ est qualifié de dense dans $\mathbb{R}$ l'ensemble de ses éléments est une partie dense dans $\mathbb{R}$.

☐ Un réel x est dit approchable par des rationnels au moins à l'ordre $d \geq 1$ s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel quel'ensemble

$$A = \{(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \mid |x - \frac{p}{q}| \leq \frac{d}{q^d}\}$$

est infini.

Théorème

Pour tout réel a, il existe un entier q et un seul tel que : $q \leq a < q + 1$.

On l'appelle partie entière de a et on le note : $q = E[a]$.

Preuve

Nous allons d'abord prouver l'existence de q en utilisant la propriété d'Archimède.

Si $a = 0$, alors $q = 0$ convient.

Si $a > 0$, posons $A = \{n \in \mathbb{N} | n > a\}$. Il est clair que A est une partie non vide de $\mathbb{N}$. Donc A est minorée. Elle possède un plus petit élément m au moins égal à 1. Il existe donc $q \in \mathbb{N}$ tel que : $m = q + 1$. Comme $m \in A$, on a : $q + 1 \geq a$. Mais comme q n'appartient pas à A, on a : $a \geq q$. Dans ce cas, on a bien prouvé l'existence de $E[a]$.

Si $a < 0$, alors $-a > 0$. Il existe d'après le cas précédent $q' \in \mathbb{Z}$ tel que : $q' \leq -a < q' + 1$. En changeant de signe, on trouve : $-q' \geq a > -q' - 1$. Si $a = -q'$, on pose $q = -q$. Si $a \neq -q'$, alors on pose : $q = -q' - 1$.

Vérifions maintenant l'unicité. Si q_1 et q_2 sont des entiers tels que :

$$q_1 \leq a < q_1 + 1 \text{ et } q_2 \leq a < q_2 + 1.$$

On obtient alors : $q_1 < q_2 + 1$ et $q_2 < q_1 + 1$. Il vient donc : $q_1 \leq q_2$ et $q_2 \leq q_1$. Donc $q_1 = q_2$.

Lemme

1°) $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

2°) $\dfrac{\ln 3}{\ln 2}$ est irrationnel.

3°) Soient n un entier supérieur ou égal à deux et $d \in \mathbb{N}^*$. $\sqrt[n]{d}$ est rationnel si et seulement si $\sqrt[n]{d}$ est un entier, c'est-à-dire si et seulement si il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que : $d = x^n$.

Preuve

1°) Si $\sqrt{2}$ n'est pas irrationnel, il existe deux entiers p et q premiers entre eux tels que : $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$. Donc

$$p^2 = 2q^2 \qquad (*)$$

2 divise donc p^2, donc également p et p est un nombre pair. Il existe alors un entier p' tel que : $p = 2p'$. La relation (*) devient : $2p'^2 = q^2$ et 2 divise q^2, donc divise aussi q. On a là une absurdité car p et q sont premiers entre eux.

2°) Si $\frac{\ln 3}{\ln 2}$ n'était pas irrationnel, alors il existerait deux entiers$p$ et q premiers entre eux tels que :

$$\frac{\ln 3}{\ln 2} = \frac{p}{q} \Rightarrow 3^q = 2^p.$$

Ceci est absurde.

3°) $\sqrt[n]{d}$ est rationnel si et seulement si ce nombre est entier. Cela est équivalent à dire qu'il existe $x \in \mathbb{N}^*$ tel que : $d = x^n$. Deux cas se présente :

– si $d = x^n$ avec $x \in \mathbb{N}$, alors il est clair que $\sqrt[n]{d} = x \in \mathbb{Q}$;

– si $\sqrt[n]{d} = \dfrac{x}{y}$ est rationnel, alors : $dy^n = x^n$. Soit p un nombre premier, alors

$$v_p(d) + n.v_p(y) = n.v_p(x) \Rightarrow v_p(d) = n(v_p(x) - v_p(y)).$$

Donc $v_p(d)$ est un multiple de n. Comme ceci est valable pour tout nombre premier p, p est une puissance $n^{ième}$.

Remarque

On va généraliser le 3°). Soit $P(X) = a_n X^n + \ldots + a_0 \in \mathbb{Z}[X]$ avec a_n, $a_0 \neq 0$. Que dire d'une racine rationnelle de P ? Soit $x = \frac{p}{q}$ une telle racine avec $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Z}^*$ et pgcd $(p, q) = 1$. On a :

$$a_n \frac{p^n}{q^n} + \ldots + a_1 \frac{p}{q} + a_0 = 0 \Rightarrow a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + ... + a_n \ pq^{n-1} + a_0 q^n = 0.$$

Ainsi q divise $a_n \ p^n$. Comme pgcd $(p, q) = 1$, le lemme de Gauss montre que q divise a_n. Symétriquement, p divise a_0.

Si P est unitaire, c'est-à-dire $a_n = 1$, alors toute racine rationnelle de P est entière.

On obtient alors : $q_1 < q_2 + 1$ et $q_2 < q_1 + 1$. Il vient donc $q_1 \leq q_2$ et $q_2 \leq q_1$. Donc $q_1 = q_2$.

Exercice

Soit (u_n) une suite strictement croissante d'entiers sur $\mathbb{N}^*$. Montrer que $\sum\limits_{n \geq 1} \dfrac{1}{u_1 ... u_n} \notin \mathbb{Q}$.

Théorème (de densité)

1°) $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

2°) $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Preuve

1°) Il suffit de montrer qu'entre deux réels, il existe toujours un rationnel. Si $\frac{p}{q}$ est un rationnel et (x, y) un couple de réels, on a : $x < \frac{p}{q} < y \Rightarrow xq < p < yq$. On voit que pour qu'il puisse y avoir un entier dans l'intervalle $]xq, yq[$, il suffit que la longueur $qy - qx = q(y-x)$ soit strictement plus grand que 1.

Alors prenons deux réels distincts x et y tel que $x < y$. Alors : $y-x > 0$. Puisque $\mathbb{R}$ est archimédien, il existe un naturel q tel que : $q(y-x) > 1$, d'où :

$$y - x > \frac{1}{q} \Rightarrow y > x + \frac{1}{q}.$$

Comme $\frac{1}{q} > 0$, il existe n tel que : $n\frac{1}{q} > |x|$.

Considérons l'ensemble : $P = \{p \in \mathbb{N} \mid \frac{p}{q} \leq x\}$. Cet ensemble est non vide car $-n \in P$. Il est majoré par n. Donc il admet un plus grand élément noté p_0. On a alors :

$$\frac{p_0}{q} \leq x < \frac{p_0+1}{q} = \frac{p_0}{q} + \frac{1}{q} \leq x + \frac{1}{q} < y.$$

Méthode 2 (pour les pressés)

Soit x et y deux réels tels que $y > x$. Comme $\mathbb{R}$ est archimédien, il existe n tel que :

$$n(y-x) > 1 \Rightarrow ny - nx > 1.$$

Dans ce cas, il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que : $nx < m < ny \Rightarrow x < \frac{m}{n} < y$.

2°) Soit deux réels x et y tels que $x < y$. On sait que l'on peut trouver un rationnel q vérifiant : $x < q < y$. Mais q est un rationnel, donc c'est un réel et on peut encore trouver un autre rationnel q' tel que : $q < q' < y$. Comme $q' - \ q > 0$ et $\sqrt{2} > 0$, il existe d'après le théorème d'Archimède $n \in \mathbb{N}^*$ tel que : $n(q'-q) > \sqrt{2}$, soit

$$q' > q + \frac{\sqrt{2}}{n}.$$

On obtient alors :

$$x < q < q + \frac{\sqrt{2}}{n} < q' < y.$$

Si $q + \frac{\sqrt{2}}{n}$ était un rationnel, alors $\frac{\sqrt{2}}{n}$ serait un rationnel. Comme n est rationnel, $\sqrt{2} = n\frac{\sqrt{2}}{n}$ serait rationnel, ce qui est absurde. On a donc construit un irrationnel $z = q + \frac{\sqrt{2}}{n}$ vérifiant : $x < z < y$.

Méthode 2

Posons $u_n = 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$. Cette suite est convergente. Posons $e = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$. On démontre que e est irrationnel. Les nombre rationnels a, b étant donnés tels que $b > a$, il existe un entier p tel que $p(b-a) > e$ et le nombre $c = a + \frac{e}{p}$ satisfait à : $a < c < b$. Si c n'était pas irrationnel, alors $e = p(c-a)$ serait rationnel.

Théorème (de Dirichlet sur l'approximation diophantienne)

1°) Soient $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ et N un entier supérieur ou égal à 2. Il existe $q \in \{1, \ldots, N\}$ et $p \in \mathbb{Z}$ tels que

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{qN} \leq \frac{1}{q^2}$$

2°) Soit $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. Il existe deux suites (p_n) et (q_n) avec $p_n \in \mathbb{Z}$, $q_n \in \mathbb{N}^*$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} q_n = +\infty$ telles que : enter

$$\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| \leq \frac{1}{q_n^2}$$

Preuve

1°) On rappèle le principe des tiroirs de Dirichlet : si $(n+1)$ objets sont rangés dans n cases, alors une case au moins contient au moins deux objets. Posons $x_k = k\alpha - E[k\alpha]$ avec $0 \leq k \leq N$. Ce sont $(N+1)$ réels distincts tous entre 0 et 1. On découpe $[0,1]$ en N intervalles $[0,1] = \bigcup\limits_{i=0}^{N-1} \left[\frac{i}{N}, \frac{i+1}{N}\right]$. D'après le principe des tiroirs, un des intervalles contient au moins deux x_k, disons x_k et x_ℓ avec $k < \ell$. On a en particulier :

$$|x_\ell - x_k| \leq \frac{1}{N} \Rightarrow |(\ell - k)\alpha - (E[\ell\alpha] - E[k\alpha])| \leq \frac{1}{N}.$$

On pose $q = \ell - k \in [1, N]$ et $p = E[\ell\alpha] - E[k\alpha] \in \mathbb{Z}$ et on obtient ce que l'on veut :

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{qN} \leq \frac{1}{q^2}$$

2°) Soit $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. Construisons deux suites (p_n) et (q_n) vérifiant les conditions du théorème. On peut prendre $p_0 = E[x]$ et $q_0 = 1$. On a bien :

$$E[x] \leq x < E[x] + 1 \Rightarrow |x - \frac{p_0}{q_0}| < 1 = \frac{1}{q_0^2}.$$

En prenant $N > \dfrac{1}{|q_0 x - p_0|}$, on peut fabriquer par récurrence deux suites (p_n) et (q_n) vérifiant les conditions du théorème.

Théorème (de Liouville)

Si x annule un polynôme de $\mathbb{Z}[X]$ de degré $d \geq 2$, il existe $c > 0$ tel que :

$$\forall (p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*, \left|x - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{c}{q^d}$$

Preuve

Soit $P(x) = a_d X^d + a_{d-1}X^{d-1} + ... + a_0$ un polynôme de degré d et $\alpha > 0$. Un polynôme a un nombre fini de racines. Soit x la seule racine de P dans $[x - \alpha, x + \alpha]$. En particulier pour tout rationnel $\frac{p}{q}$ de $[x - \alpha, x + \alpha]$, on a : $P(\frac{p}{q}) \neq 0$. Mais

$$|P(\frac{p}{q})| = |a_d(\frac{p}{q})^d + \ldots + a_0| = |\frac{u}{q^d}| \text{ avec } u \in \mathbb{Z}.$$

Comme $P(\frac{p}{q}) \neq 0$, on a : $u \neq 0$ et donc $|u| > 1$, donc

$$|P(\frac{p}{q})| \geq \frac{1}{q^d} \Rightarrow |P(\frac{p}{q}) - P(x)| \geq \frac{1}{q^d} \text{ car } P(x) = 0.$$

Soit $M = \max\{|P'(t)|, t \in [x-\alpha, x+\alpha]\}$. Le théorème des accroissements finis donne :

$$M|\frac{p}{q} - x| \geq |P(\frac{p}{q}) - P(x)| \text{ si } |\tfrac{p}{q} - x| \leq \alpha.$$

Donc :

$$M|x - \frac{p}{q}| \geq \frac{1}{q^d} \Rightarrow |x - \frac{p}{q}| \geq \frac{c}{q^d} \text{ avec } c = \frac{1}{M}.$$

Si maintenant $|x - \frac{p}{q}| > \alpha$, alors à fortiori on a : $|x - \dfrac{p}{q}| \geq \dfrac{\alpha}{q^d}$. Donc

$$|x - \frac{p}{q}| \geq \frac{\max\{\alpha, M\}}{q^d}.$$

Théorème

Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ non réduit à $\{0\}$.

Alors G est soit dense dans $\mathbb{R}$, soit de la forme $a\mathbb{Z}$ pour un certain $a > 0$.

Preuve

Il est clair que le sous-groupe $\{0\}$ est discret car on peut l'écrire : $\{0\} = 0.\mathbb{Z}$.

Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ non réduit à $\{0\}$. Si on pose $A = G \cap \mathbb{R}_+^*$, on constate que A est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée par 0, ce qui justifie l'existence d'une borne inférieure $a = \inf A$. On a deux cas à étudier :

− Si $a = 0$, montrons que G est dense dans $\mathbb{R}$. Il suffit alors de vérifier que si $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ avec $x < y$, alors

$$]x, y[\cap G \neq \emptyset.$$

Comme $\inf A = 0$, il existe $u \in A$ tel que : $0 < u < y - x$ et donc : $u \in G\cap]0, y - x[$. Comme G est un sous-groupe de $\mathbb{R}$, nu appartient aussi à G avec n un entier naturel. Cherchons alors un entier naturel n tel que : $nu \in]x, y[$. On a :

$$nu \in]x, y[\Leftrightarrow x < nu < y \Leftrightarrow \frac{x}{u} < n < \frac{y}{u}.$$

Pour que l'intervalle $]\frac{x}{u}, \frac{y}{u}[$ contient un élément de $\mathbb{Z}$, il suffit que la longueur $\frac{y-x}{u}$ soit strictement supérieur à 1. Comme $u \in G\cap]0, y - x[$, il est clair que : $\frac{y-x}{u} > 1$ et c'est gagné.

− Si $a > 0$, montrons successivement que $a \in G$ et que $G = a\mathbb{Z}$.

Si a n'était pas dans G, alors on auraitpar la caractérisation de la borne inf :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists b \in A,\ a < b < a + \varepsilon.$$

En particulier en prenant $\varepsilon = a$, alors il existerait $y \in A$ tel que : $a < y < 2a$. On pourrait ainsi trouver x dans $]a, 2a[\cap G$. En prenant encore $\varepsilon = y - a$, il existerait $x \in]a, y[\cap G$. Comme G est un sous-groupe de $\mathbb{R}$, on a : $y - x \in G$ et $y - x \in [0, a]$. Comme $y - x > 0$, il est clair que $y - x \in A$. Il y a là contradiction avec le fait que a est le plus petit des minorants de A. Donc on a : $a \in \mathbb{Z}$, ce qui implique que : $a\mathbb{Z} \subset G$.

Réciproquement soit $x \in G$. Soit $n = E[\frac{x}{a}]$, alors :

$$n \leq \frac{x}{a} < n+1 \Rightarrow 0 \leq x - na < a.$$

Comme $x - na \in G$ et donc $x - na \in A$, on a par définition de a : $x - na = 0$ et $x = na \in a\mathbb{Z}$.

On vient de montrer que : $G = a\mathbb{Z}$.

Exemple

☐ Soit a, $b > 0$ et $G = a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = \{am + bn \mid (m, n) \in \mathbb{Z}^2\}$. Montrons que G est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si le rapport $\frac{a}{b}$ est irrationnel.

Il est clair que G est un sous-groupe de $\mathbb{R}$. Si G n'est pas dense dans $\mathbb{R}$, alors il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que : $G = n\mathbb{Z}$. Dans ce cas comme $a \in G$ et $b \in G$, alors $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$. Donc par contraposition, si $\frac{a}{b}$ est rationnel, alors G est dense dans $\mathbb{R}$.

Réciproquement si $\frac{a}{b}$ est rationnel, on écrit :

$$\frac{a}{b} = \frac{p}{q} \Rightarrow b = \frac{q}{p} a \in \mathbb{Z} \in \frac{a}{p}\mathbb{Z} \text{ avec } p,\, q \in \mathbb{N}^*.$$

On a donc : $G \subset \frac{a}{p}\mathbb{Z}$, ce qui montre que G n'est pas dense dans $\mathbb{R}$. Par contraposition si G est dense dans $\mathbb{R}$, alors $\frac{a}{b}$ est irrationnel.

II) Suites de nombres réels

A) Suites convergentes

Définition

☐ On appelle suite de nombres réels toute application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. On notera (u_n) une telle application.

☐ La suite (u_n) est dite majorée s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq M$.

☐ La suite (u_n) est dite minorée s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq m$.

☐ La suite (u_n) est dite bornée si elle est à la fois majorée et minorée.

☐ Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0,\, \exists N,\, \forall n > N,\, |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

☐ Une suite (z_n) de nombres complexes converge vers z si et seulement si $|z_n - z|$ converge vers 0.

Propriété

1°) Si une suite (u_n) converge vers ℓ et ℓ', alors $\ell = \ell'$.

2°) Toute suite (u_n) de réels qui converge vers un réel strictement positif est minorée à partir d'un certain rang par un réel strictement positif.

3°) Toute suite convergente est bornée. La réciproque est fausse, il suffit de considérer la suite $u_n = (-1)^n$.

Preuve

1°) Supposons ℓ' un deuxième réel possédant la propriété suivante :

$$\forall \varepsilon > 0,\, \forall n > n_0,\, |u_n - \ell'| < \varepsilon.$$

On peut écrire

$$\ell - \ell' = \ell - u_n + u_n - \ell.$$

L'inégalité triangulaire donne

$$|\ell - \ell'| \leq |\ell - u_n| + |u_n - \ell'|.$$

Par hypothèse, pour tout réel strictement positif ε, il existe un entier naturel n_0 tel que si n est supérieur à n_0,

$$|u_n - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

De même, il existe un entier naturel n_1 tel que si $n \geq n_1$,

$$|u_n - \ell'| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Prenons $n = \sup\{n_0, n_1\}$, nous obtenons

$$|\ell - \ell'| \leq \varepsilon,$$

ce qui implique $\ell = \ell\prime$.

2°) Soit (u_n) une suite convergente vers $\lambda > 0$. On a alors :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n > N \Rightarrow |u_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

En particulier avec $\varepsilon = \dfrac{\ell}{2}$, il existe N' tel que :

$$\forall n > N' \Rightarrow |u_n - \ell| \leq \frac{\ell}{2} \Rightarrow -\frac{\ell}{2} \leq u_n - \ell \leq \frac{\ell}{2} \Rightarrow \frac{\ell}{2} \leq u_n \leq \frac{3\ell}{2}.$$

$\dfrac{\ell}{2}$ est un minorant strictement positif de la suite (u_n)à partir d'un certain rang.

3°) Soit (u_n) une suite réelles convergente vers λ. Par définition, on a

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

Prenons par exemple $\varepsilon = 1$, alors :

$$n > n_0 \Rightarrow |u_n - \ell| \leq 1 \Rightarrow u_n - \ell \leq 1 \text{ et } \ell - u_n \leq 1.$$

Il vient alors :

$$u_n \in]\ell - 1, \ell + 1[.$$

Donc pour $n > n_0$, on a : $|u_n| \leq |\ell| + 1$. Si nous posons $m = \min\{u_0, u_1, \ldots, u_{n_0}, \ell - 1\}$ et $M = \max\{u_0, u_1, \ldots, \ell + 1\}$, il vient immédiatement : $m \leq u_n \leq M$, pour tout n.

Lemme

Si la suite (u_n) converge vers zéro, et si la suite (v_n) est bornée, alors la suite $(u_n v_n)$ converge vers zéro.

Preuve

Soit $M \in \mathbb{R}$ tel que l'on ait

$$|v_n| \leq M \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Le nombre $\varepsilon > 0$ étant donné, il existe un entier $n(\varepsilon)$ tel que l'inégalité $n > n(\varepsilon)$ entraîne

$$|u_n| < \frac{\varepsilon}{M}.$$

Mais, on a par ailleurs

$$|u_n v_n| \leq M|u_n|,$$

d'où

$$|u_n v_n| < \varepsilon \text{ pour tout } n > n(\varepsilon).$$

Théorème (opérations algébriques)

Soit (u_n) et (v_n) deux suites convergente respectivement vers ℓ et ℓ'. On a :

1°) la suite $(|u_n - \ell|)$ converge vers 0.

2°) la suite $(u_n + v_n)$ converge vers $(\ell + \ell')$

3°) la suite $(u_n - v_n)$ converge vers $(\ell - \ell')$

4°) la suite $(u_n v_n)$ converge vers $(\ell\ell')$

5°) Si ℓ' est non nul et à partir d'un certain rang n_0, $v_n \neq 0$, alors la suite $\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n \geq n_0}$ converge vers $\frac{1}{\ell}$.

6°) Si ℓ' est non nul et à partir d'un certain rang n_0, $v_n \neq 0$, alors la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n \geq n_0}$ converge vers $\frac{\ell}{\ell'}$.

Preuve

1°) Par définition, on a :

$$\exists N,\, n > N \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

Il suffit ensuite d'écrire

$$||u_n - \ell| - 0| \leq |u_n - \ell| < \varepsilon \text{ pour } n > N.$$

Donc 0 est bien la limite de la suite $(|u_n - \ell|)$.

2°) Par définition, $\forall \varepsilon > 0$, il existe un entier $n(\varepsilon)$ tel que, pour tout $n > n(\varepsilon)$, on ait à la fois

$$|u_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2} et |v_n - \ell'| < \frac{\varepsilon}{2},$$

d'où

$$|u_n + v_n - (\ell + \ell')| < \varepsilon,$$

ce qui montre que la suite $(u_n + v_n)$ converge vers $(\ell + \ell')$.

3°) On démontrerait de même que la suite $(u_n - v_n)$ converge vers $(\ell - \ell')$.

4°) On peut écrire

$$u_n v_n - \ell\ell' = (u_n - \ell)v_n + \ell(v_n - \ell)..$$

Les suites $(u_n - \ell)$ et $(v_n - \ell)$ convergent vers zéro, et la suite (v_n) est bornée, car elle est convergente. Il en résulte que chacune des suites définies par

$$u_{n'} = (u_n - \ell)v_n \text{ et } v_{n'} = \ell(v_n - \ell')$$

converge vers zéro ; et la première partie de la démonstration montre que la suite

$$(u_n v_n - \ell\ell') = u_{n'} + v_{n'}$$

converge vers zéro.

5°) Pour $\varepsilon > 0$, on a

$$\left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell}\right| = \frac{|\ell - u_n|}{|\ell u_n|}.$$

Par définition de la limite, il existe N tel que pour tout $n > N$, on a

$$|v_n| > \frac{|\ell|}{2}.$$

Donc $\forall n > N$,

$$\left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell}\right| < C|u_n - \ell| \text{ avec } C = \tfrac{2}{\ell^2}.$$

Or $\exists M$, $\forall n > M$,

$$|u_n - \ell| < \frac{\ell}{C}.$$

Donc, $\forall n > \max\{N, M\}$,

$$\left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell}\right| < \varepsilon.$$

6°) On applique 3°) et 4°).

Exemple

☐ Toute suite constante est convergente.

☐ Montrons que la suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\mathbb{R}$ est archimédien, il existe un entier N tel que

$$N \geq \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{1}{N} \leq \varepsilon.$$

Pour tout $n > N$, il est clair que

$$\frac{1}{n} < \frac{1}{N}.$$

Donc pour tout $n > N$, on a

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon \Rightarrow (u_n) \text{ converge vers } 0.$$

Donnons maintenant un théorème assez étrange de Césaro :

Théorème (de Césaro)

Soit (u_n) une suite réelle. Posons

$$v_n = \frac{u_1 + u_2 + ... + u_n}{n}.$$

Si la suite (u_n) converge vers ℓ, alors (v_n) converge aussi vers ℓ. Lorsque $\ell = \infty$, ce résultat est encore vrai.

Preuve

C'est du découpage, à faire en exercice.

Remarque

Il peut arriver que la suite (u_n) diverge et que la suite (v_n) converge. Par exemple si $u_n = (-1)^n$, alors :

$$v_n = \frac{-1 + 1 + ... - 1 + 1}{n} .$$

Si n est pair, alors $v_n = 0$ et si n est impair, $v_n = -\frac{1}{n}$. En faisant tendre n vers l'infini, on trouve :

$$\lim_{n \to +\infty} v_n = 0.$$

Théorème

Une suite $z_n = u_n + v_n$ converge vers $z = u + iv$ si et seulement si (u_n) converge vers u et (v_n) converge vers v.

B) Suites divergentes

Définition

☐ On dit qu'une suite (u_n) diverge si et seulement si (u_n) ne converge pas. Formellement cela s'écrit

$$\forall \ell \in \mathbb{R}, \exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \forall N \in N, \exists n \in N, n \geq N \text{ et } |u_n - \ell| \geq \varepsilon.$$

☐ Soit (u_n) une suite de réels, on dit qu'une suite (v_n) est une sous-suite ou suite extraite de (u_n) lorsqu'il existe une application φ de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$, strictement croissante, telle que pour tout n entier, $v_n = u_{\varphi(n)}$.

☐ Un réel a est une valeur d'adhérence d'une suite (u_n) si et seulement s'il est limite d'une suite extraite de (u_n). Formellement, cela s'écrit

$$\forall \varepsilon > 0, \forall N, \exists n > N \text{ tel que } |u_n - a| < \varepsilon.$$

Remarque

Dans la pratique, la phrase logique

$$«\forall \ell \in \mathbb{R}, \exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, n \geq N \text{ et } |u_n - \ell| \geq \varepsilon»$$

est peu maniable à cause de «$\forall \ell \in \mathbb{R}$». Souvent, on raisonne par l'absurde : on cherche à déterminer la valeur de ℓ en passant à la limite dans la relation de définition d'une suite convergente, et montrer que la suite (u_n) ne tend pas vers cette valeur là.

Propriété

1°) Toute suite non bornée diverge.

2°) Toute suite admettant deux suites extraites qui convergent vers des limites distinctes diverge.

3°) Une suite (u_n) vérifiant

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall N \in \mathbb{N},\ \exists (p,q) \text{ tel que } p \geq q \geq N \text{ et } |u_p - u_q| \geq \varepsilon$$

diverge.

Preuve

1°) On sait que si une suite (u_n) converge, alors cette suite est bornée. On raisonne par l'absurde en supposant que (u_n) converge et n'est pas bornée, alors c'est contradictoire avec le phénomène citée.

2°) On sait que toute suite extraite de (u_n) converge vers la même limite si (u_n)est une suite convergente. On raisonne encore par l'absurde et on aboutit facilement à une contradiction.

3°) $\mathbb{R}$, étant complet, une suite (u_n) converge si et seulement si c'est une suite de Cauchy. La phrase

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall N \in \mathbb{N},\ \exists (p,q) \text{ tel que } p \geq q \geq N \text{ et } |u_p - u_q| \geq \varepsilon$$

est la négation de la définition d'une suite de Cauchy (on verra cette notion un peu plus loin).

Propriété

Si une suite (u_n) admet au moins deux valeurs d'adhérence distinctes, alors cette suite diverge.

En particulier, si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = \ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = \ell'$, alors (u_n) diverge.

Exemple

☐ Soit $u_n = (-1)^n + \dfrac{1}{n}$. Cette suite diverge car $\lim\limits_{n\to\infty} u_{2n} = 1$ et $\lim\limits_{n\to\infty} u_{2n+1} = -1$.

☐ Soit $\alpha \neq 0[\pi]$. Dans ce cas, $\sin\alpha \neq 0$. Montrons que la suite (u_n) définie par $u_n = \sin(n\alpha)$ est divergente. Considérons la suite (v_n) définie par $v_n = \cos(n\alpha)$. On suppose que la suite (u_n) converge vers une limite ℓ. Alors en écrivant :

$$\sin(n+1)\alpha = \sin\alpha.\cos n\alpha + \cos\alpha.\sin n\alpha,$$

on a :

$$v_n = \frac{u_{n+1} - \cos\alpha.u_n}{\sin\alpha} \to \frac{\ell - \ell\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Considérons la suite (z_n) définie par : $z_n = v_n + iu_n = e^{in\alpha}$. Si (u_n) convergeait, alors la suite (z_n) convergeait aussi vers une limite L. Cherchons L :

$$z_{n+1} = e^{i(n+1)\alpha} = e^{i\alpha} z_n.$$

Par passage à la limite, on trouve : $L(1 - e^{i\alpha}) = 0$. Comme $(1 - e^{i\alpha}) \neq 0$ car $\alpha \neq 0[\pi]$, on en déduit que $L = 0$. Mais cela n'est pas possible parce que $|z_n - 0| = 1$.

Exercice

1°) $(\cos n)_n$ diverge :

a- En utilisant les formules

$$\cos 2n = 2\cos^2 n - 1$$

et

$$\cos 3n = 4\cos^3 n - 3\cos n,$$

montrer que si $(\cos n)_n$ converge, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \cos n = 1$.

b- Montrer que si $(\cos n)_n$ converge vers 1, alors $(\sin n)_n$ converge vers 0.

En déduire en utilisant la formule

$$\cos(n+1) = \cos n \cos 1 - \sin n \sin 1,$$

que $\cos 1 = 1$. Conclure.

c- Montrer que $(\cos(2\pi\sqrt{n^2+1}))_n$ converge.

2°) Autre façon de montrer que $(\cos n)_n$ diverge :

Soit

$$\varphi_1 : n \mapsto E[2n\pi], \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ et } \varphi_2 : n \mapsto E[(2n+1)\pi]$$

où $E[x]$ désigne la partie entière de x.

a- Démontrer que φ_1 et φ_2 sont strictement croissantes.

b- Soient

$$u_n = \cos n,\ v_n = \cos(\varphi_1(n)),\ w_n = \cos(\varphi_2(n)).$$

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n \in [\cos 1, 1] \text{ et } v_n \in [-1, \cos(\pi - 1)].$$

c- En déduire que $(u_n)_n$ diverge.

d- En déduire que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^+$, la suite $(n\alpha \cos n)_n$ diverge.

Indication : s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $(n\alpha \cos n)_n$ converge ; montrer que $(\cos n)_n$ converge vers 0.

C) Suites de limites infinies - Opérations algébriques

Définition

☐ Dans $\mathbb{R}$, une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$ si :

$$\forall A,\ \exists N,\ \forall n > N,\ u_n > A.$$

☐ Dans $\mathbb{R}$, une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$ si :

$$\forall A,\ \exists N,\ \forall n > N,\ u_n < A.$$

☐ Une suite (z_n) de nombres complexes diverge vers $+\infty$ si $|z_n|$ tend vers $+\infty$.

Remarque

Les suites ayant pour limite ∞, ne sont pas bornées, donc ne sont pas convergentes. On ne perdra pas de vue que les suites "divergentes" ne sont pas seulement celles qui tendent vers $+\infty$ ou $-\infty$: la plupart d'entre elles courent dans tous les sens dans le désordre le plus total.

Théorème

1°) Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles. Si (u_n) admet pour limite $+\infty$ et s'il existe un n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$,

$$v_n \geq u_n + B,$$

alors (v_n) admet pour limite $+\infty$.

2°) Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles. Si (u_n) admet pour limite $-\infty$ et s'il existe un n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$,

$$v_n \leq u_n + B,$$

alors (v_n) admet pour limite $-\infty$.

Preuve

1°) Soit $A \in \mathbb{R}$ et posons $A' = A - B$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, il existe un n_0 tel que $n \geq n_0$ implique

$$u_n \geq A'.$$

On en déduit que $n \geq n_0$ implique

$$v_n \geq u_n + B \geq A' + B = A.$$

Donc

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty.$$

2°) On raisonne de la même manière.

Exemple

□ Pour $a \in]1, +\infty[$, alors on peut l'écrire $a = 1 + h$ avec $h > 0$. La formule du binôme de Newton donne :

$$a^n = (1+h)^n \geq 1 + nh.$$

Soit $A \in \mathbb{R}_+$, il existe d'après la propriété d'Archimède $N \in \mathbb{N}$ tel que : $Nh > A - 1$.

Si $n \geq N$, alors :

$$a^n = (1+h)^n \geq 1 + nh \geq 1 + Nh > A.$$

Donc pour un réel $a > 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = +\infty$.

Exercice

1°) Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Montrer que $(n\alpha)_n$ diverge vers $+\infty$ ou $-\infty$ suivant que $\alpha < 0$ ou $\alpha > 0$.

2°) Soit $p \in \mathbb{N}^*$, démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^p \geq n$. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = +\infty$.

3°) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n! \geq n$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} n!$

Propriété (sommes)

Soient (a_n) et (b_n) deux suites.

1°) Si $\lim a_n = +\infty$ et $\lim b_n = +\infty$, alors $\lim (a_n + b_n) = +\infty$.

2°) Dans $\mathbb{R}$, si (a_n) est minorée et (b_n) tend vers $+\infty$, alors $(a_n + b_n)$ tend vers $+\infty$.

3°) Dans $\mathbb{R}$, si (a_n) est majorée et (b_n) tend vers -∞, alors $(a_n + b_n)$ tend vers -∞.

4°) Si (a_n) est bornée et (b_n) tend vers ∞, alors $(a_n + b_n)$ tend vers ∞.

On résume les résultats sur un tableau :

$\lim v_n \backslash \lim u_n$	ℓ	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?
$-\infty$	$-\infty$	?	$-\infty$

Démonstration

1°) Si $\lim a_n = +\infty$ et $\lim b_n = +\infty$, alors pour tout $m \in \mathbb{R}$, il existe n_0 tel que

$$n \geq n_0 \Rightarrow b_n \geq m.$$

De même, pour tout $A > 0$, il existe n_1 tel que

$$n \geq n_1 \Rightarrow a_n \geq A - m.$$

On a alors

$$n > \max\{n_0, n_1\} \Rightarrow a_n + b_n \geq A,$$

d'où

$$\lim (a_n + b_n) = +\infty.$$

2°) Remarquons tout d'abord que

$$\forall A,\, a_n + b_n \ \geq b$$

Or,

$$\exists M,\, \forall n,\, a_n \ \leq M \text{ et } \exists N,\, \forall n > N,\, b_n > A + M.$$

Donc,

$$n > N,\, a_n + b_n > A.$$

3°) Même raisonnement qu'au 2°=).

4°) C'est une conséquence de ce qui précède.

Remarque

L'infinie c'est un concept qui n'est pas un nombre. Les formes suivantes sont des formes indéterminées :

$$\infty - \infty,\, 0.\infty,\, \frac{\infty}{\infty},\, \frac{0}{0},\, 0^0 \text{ et } 1^\infty.$$

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, on ne peut pas préciser de manière générale le comportement asymptotique de $(u_n + v_n)$.

− Prenons par exemple les suites $u_n = n + \frac{1}{n}$ et $v_n = -n$. Il est clair que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty, \lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty,$$

mais

$$\lim_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = 0.$$

− Prenons maintenant $u_n = n^2$ et $v_n = -n$. Alors

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty, \lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty,$$

mais

$$\lim_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = \lim_{n\to+\infty} n(n-1) = +\infty.$$

− Prenons par exemple les suites $u_n = 1 + \dots + \frac{1}{n}$ et $v_n = -\ln n$. Il est clair que ces deux suites divergent l'unevers $+\infty$ l'autrevers $-\infty$. Mais la suite $(u_n + v_n)$ est une suite décroissante et minorée, elle converger donc.

− Prenons par exemple les suites $u_n = n^2 + (-1)^n$ et $v_n = \frac{(-1)^n}{n}$. Il est clair que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty, \lim_{n\to+\infty} v_n = 0,$$

mais $(u_n v_n)$ n'a pas de limite.

Propriété (produit)

1°) Si $\lim a_n = +\infty$ et $\lim b_n = +\infty$, alors $\lim(a_n b_n) = +\infty$.

2°) Si $(|a_n|)$ est minoré par un réel strictement positif et si (b_n) tend vers ∞, alors $(a_n b_n)$ tend vers ∞.

On résume différents résultats sur ce tableau :

$\lim v_n \backslash \lim u_n$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	0	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?	$-\infty$	$+\infty$

Preuve

1°) Soit $A > m > 0$. Comme $\lim b_n = +\infty$, il existe n_0 tel que

$$n \geq n_0 \Rightarrow b_n > m.$$

De même, comme $\lim a_n = +\infty$, il existe n_1 tel que

$$n \geq n_0 \Rightarrow a_n > \frac{A}{m},$$

donc

$$n \geq \max\{n_0, n_1\} \Rightarrow a_n b_n > A.$$

2°) Soit $m > 0$ minorant (a_n). On a,

$$\forall A > 0, |a_n b_n| \geq |b_n|\, m$$

Or,

$$\exists N, \forall n > N, |b_n| > \frac{A}{m}$$

Donc,

$$\forall n > N, |a_n b_n| > A.$$

On obtient une forme indéterminée lorsque l'une des suites tend vers 0, et l'autre vers ∞.

Remarque

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$, on ne peut pas préciser de manière générale le comportement asymptotique de $(u_n v_n)$.

– Prenons par exemple les suites $u_n = n^2$ et $v_n = \dfrac{1}{n}$. Il est clair que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty, \lim_{n\to+\infty} v_n = 0,$$

mais

$$\lim_{n\to+\infty} (u_n v_n) = +\infty.$$

– Prenons un autre exemple : $u_n = n$ et $v_n = \dfrac{a}{n}$. Il est clair que

$$\lim_{n\to+\infty} (u_n v_n) = a.$$

– Prenons par exemple les suites $u_n = n^2$ et $v_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$. On voit que la suite $(u_n v_n)$ n'a pas de limite.

Propriété

Soit (a_n) une suite.

1°) Si (a_n) tend vers 0, alors $(\dfrac{1}{a_n})$ tend vers ∞.

2°) Si (a_n) tend vers ∞, alors $(\dfrac{1}{a_n})$ tend vers 0.

Preuve

1°) On a

$$\forall A > 0, \exists N, n > N, |a_n| < \frac{1}{A},$$

donc

$$\left|\frac{1}{a_n}\right| > A.$$

2°) C'est facile, il suffit d'appliquer la définition d'une suite convergente vers ∞.

Propriété (inverse)

Soient (a_n) et (b_n) deux suites.

1°) Si (a_n) est bornée et (b_n) converge vers ∞ , alors $(\dfrac{a_n}{b_n})$ tend vers 0.

2°) Si $(|a_n|)$ est minoré par un réel strictement positif et si (b_n) tend vers 0, alors $(\frac{a_n}{b_n})$ tend vers ∞.

3°) Si (a_n) converge vers ∞ et si (b_n) est bornée, alors $(\dfrac{a_n}{b_n})$ converge vers ∞.

Preuve

Il suffit d'utiliser les résultats démontrés pour le produit et l'inverse.

On obtient une forme indéterminée lorsque les suites tendent vers ∞, ou vers 0.

Dans certaines propositions relatives à l'inverse et au quotient, il est possible que certains termes du dénominateur s'annulent.Cependant, il résultera du paragraphe 4 qu'ils sont non nuls à partir d'un certain rang. On peut alors parler de la limite de la suite sans problème. Dans les autres cas, il faut cependant supposer que le dénominateur est non nul.

Exemple

□ Soit $x_n = 1 + \dfrac{1}{2} + ... + \dfrac{1}{n} = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \dfrac{1}{p}$.

La suite est croissante. On a :

$$\begin{array}{rcl} x_{2^n} & = & 1+\dfrac{1}{2}+(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4})+(\dfrac{1}{5}+...+\dfrac{1}{8})+...+(\dfrac{1}{2^{n-1}+1}+...+\dfrac{1}{2^n}) \\ & \geq & 1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{4}+\dfrac{4}{8}+...+\dfrac{2^{n-1}}{2^n}=1+\dfrac{1}{2}+...+\dfrac{1}{2} \\ & \geq & 1+\frac{n}{2}. \end{array}$$

D) Suites monotones

Définition

□ Une suite (u_n) de réels est dite croissante si : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$.

Elle est dite croissante strictement si

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n < u_{n+1}.$$

□ Elle est dite décroissante si

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq u_{n+1}.$$

Elle est dite décroissante strictement si

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > u_{n+1}.$$

□ Elle est monotone lorsqu'elle est croissante ou décroissante.

□ Si elle n'est pas monotone, on dit qu'elle est stationnaire. Dans ce cas, ilexiste n_0 tel que l'on ait

$$u_n = u_{n_0} \text{ pour tout } n \geq n_0.$$

Remarque

1°) La suite (u_n) est croissante si et seulement si $(-u_n)$ est décroissante.

2°) Une suite n'est pas nécessairemen tmonotone, considérer par exemple $u_n = (-1)^n$.

3°) On peut définir la notion de suite monotone pour toute suite d'un ensemble ordonné. En revanche, on ne peut pas parler d'une suite monotone de nombres complexes car $\mathbb{C}$ ne possède pas de relation d'ordre intéressante et compatible avec sa structure de corps.

4°) La suite (u_n) est bornée si et seulement si $(|u_n|)$ est une suite majorée.

5°) Pour étudier le sens de variation d'une suite (u_n), on peut étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$. On peut aussi comparer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ par rapport à 1 dans le cas où la suite est de signe constant.

Théorème (fondamental)

Soit (u_n) une suite croissante. Alors

i) ou bien (u_n) n'est pas majorée et alors (u_n) tend vers $+\infty$.

ii) ou bien (u_n) est majorée et alors (u_n) converge vers $u = \sup\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$.

Démonstration

i) Soit (u_n) une suite croissante et $B \in \mathbb{R}$. Si on suppose que (u_n) n'est pas majorée, alors B n'est pas un majorant de la suite. Il existe alors un entier N tel que $B \leq u_N$. Comme (u_n) est croissante, pour tout $n \geq N$, on a

$$u_N \leq u_n \Rightarrow B \leq u_n.$$

C'est exactement la définition de «tendre vers l'infini».

ii) **1ère preuve**

Si la suite (u_n) est majorée, il est clair que l'ensemble des valeurs prises par cette suite est un ensemble de réels non vide et majoré. Il admet donc une borne supérieure, que l'on notera

$$u = \sup\{u_n, n \in \mathbb{N}\}.$$

Nous allons montrer que (u_n) converge vers u. Comme la suite (u_n) est croissante, on a

$$\forall n,\ u_{n+1} \geq u_n.$$

Par ailleurs, comme u est un majorant de (u_n), on a pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ l'inégalité $u_n \leq u$.

Soit maintenant un $\varepsilon > 0$. Le réel l $(u - \varepsilon)$ est alors strictement inférieur au réel u, qui est le plus petit majorant de (u_n). Le réel $(u - \varepsilon)$ n'est donc pas un majorant de (u_n), donc il existe un $N > 0$ tel que

$$u - \varepsilon < u_N.$$

En re-écrivant,

$$\forall n \geq N,\ u - \varepsilon < u_N \leq u_n.$$

et donc en synthétisant les deux inégalités prouvées que

$$u - \varepsilon < u_n \leq u.$$

Les réels u et u_n sont donc à moins de ε l'un de l'autre, ou en d'autres termes

$$\forall n > N,\ u - \varepsilon < u_n < u + \varepsilon \Rightarrow |u_n - u| < \varepsilon.$$

2ème preuve (on utilise la notion de suite de Cauchy qui sera vu dans le chapitre sur le théorème de Bolzano-Weierstrass)

Si (u_n) est majorée d'éléments de $\mathbb{R}$, montrons qu'elle est de Cauchy par l'absurde. Supposons le contraire, alors

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*},\ \forall N \in \mathbb{N},\ \exists n,\ p \in \mathbb{N},\ N < n < p \text{ et } u_p - u_n \geq \varepsilon.$$

Pour $N = 0$, alors

$$\exists n_0,\ n_1 \text{ et } 0 < n_0 < n_1 \text{ et } u_{n_1} - u_{n_0} \geq \varepsilon.$$

Pour $N = n_1$, alors

$$\exists n_3,\ n_2 \text{ et } n_1 < n_2 < n_3 \text{ et } u_{n_3} - u_{n_2} \geq \varepsilon.$$

Par récurrence, on construit une suite strictement croissante $(n_k)_{k \geq 0}$ d'entiers telle que

$$\forall k \geq 0,\ u_{n_{2k+1}} - u_{n_{2k}} \geq \varepsilon.$$

Il suit

$$\forall k \geq 0,\ u_{n_{2k+2}} - u_{n_{2k}} \geq u_{n_{2k+1}} - u_{n_{2k}} \geq \varepsilon.$$

Puis par récurrence

$$\forall k \geq 0,\ u_{n_{2k}} \geq \quad u_{n_0} + k\varepsilon.$$

La suite (u_n) étant majorée, il en est de même de la suite $(k\varepsilon)_{k \geq 0}$, ce qui n'est pas vu que $\mathbb{K}$ est archimédien. Donc (u_n) est de Cauchy, c'est-à-direconvergente. Posons $u = \sup\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$, alors u est un majorant de $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ et on a : $\forall n,\ u \geq u_n$. Par ailleurs, soit y un majorant de $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$, alors $\forall n,\ u_n \leq y$, donc $u \leq y$. Ainsi, u est le plus petit des majorants.

On a évidemment un résultat analogue pour les suites décroissantes, minorées ou non.

Théorème

Soit (u_n) une suite décroissante. Alors

i) ou bien (u_n) n'est pas minorée et alors (u_n) tend vers $-\infty$.

ii) ou bien (u_n) est minorée et alors (u_n) converge vers $u = \inf\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$.

Théorème (de Ramsay)

De toute suite de nombres réels, on peut extraire une sous-suite monotone.

Démonstration

On cherche à extraire d'une suite (v_n) de nombres réels une sous-suite (u_n) qui a la propriété suivante :

– soit pour tout $n > m$, $u_n \geq u_m$

– soit pour tout $n > m$, $u_n < u_m$.

Nous allons construire par récurrence un nombre $\varphi(n)$ d'un ensemble

$$A = \{n \in \mathbb{N} | \text{ pour tout } k > n, v_k < v_n\}.$$

Nous somme confrontés à deux cas.

– Si A est fini, on va alors parvenir à extraire de (v_n) une sous-suite croissante. Prenons $\varphi(0)$ strictement plus grand que tous les éléments de A. Dès lors, $\varphi(0) \notin A$ et il existe donc au moins un $n > \varphi(0)$ tel que

$$v_n \geq v_{\varphi(0)}.$$

Prenons pour $\varphi(1)$ un tel n. On a alors

$$v_{\varphi(1)} \geq v_{\varphi(0)}$$

d'une part, et d'autre part

$$\varphi(0) < \varphi(1)$$

dont on déduit que

$$\varphi(1) \notin A.$$

Ce dernier fait autorise à recommencer de même et construire un $\varphi(2)$ tel que

$$v_{\varphi(2)} \geq v_{\varphi(1)}$$

et en même temps

$$\varphi(1) < \varphi(2),$$

et donc

$$\varphi(2) \notin A.$$

On peut alors écrire si on y tient une récurrence formelle permettant de construire toute l'application φ, ou se contenter d'être convaincu qu'on saurait le faire puisque rien n'empêche de répéter ce processus indéfiniment. La suite extraite croissante annoncée est alors construite en posant $u_n = v_{\varphi(n)}$.

– Si A est infini, on va alors parvenir à extraire de (v_n) une suite décroissante. Prenons pour $\varphi(0)$, $\varphi(1)$, ... les éléments de A, numérotés dans l'ordre croissant. Comme A est infini, l'application φ est définie sur $\mathbb{N}$ et sont strictement croissante par construction.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, comme $\varphi(n)$ est dans A et que $\varphi(n+1) > \varphi(n)$, on obtient par définition de A l'inégalité

$$v_{\varphi(n+1)} < v_{\varphi(n)}.$$

La suite extraite $u_n = v_{\varphi(n)}$ construite est donc bien décroissante et même strictement décroissante.

Remarque

Le théorème des suites croissantes majorées peut être fausse pour les suites de $\mathbb{Q}$. Par exemple, la suite

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{2}{u_n}),\ u_0 > 0$$

est décroissante d'éléments de $\mathbb{Q}$, minorée par 0. Elle ne converge pas dans $\mathbb{Q}$, car sa limite est $\sqrt{2}$.

Exemple

☐ Soit

$$u_n = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{n!}.$$

(u_n) est évidemment croissante. On prouve par récurrence que

$$(n+1)! > 2^n \text{ pour } n \geq 1.$$

Donc la suite est majorée par :

$$u_n \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + 2[1 - \frac{1}{2^n}] < 3.$$

Etant croissante majorée, elle converge (on prouvera ultérieurement qu'elle converge vers e).

☐ Soit

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}.$$

Cette suite est croissante. On a :

$$\begin{aligned} u_{2^n} &= 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} + ... + \frac{1}{8}) + ... + (\frac{1}{2^{n-1}+1} + ... + \frac{1}{2^n}) \\ &\geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{4}{8} + ... + \frac{2^{n-1}}{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{2} \\ &\geq 1 + \frac{n}{2}. \end{aligned}$$

Donc la suite n'est pas majorée. Elle tend vers $+\infty$.

Exercice

Soit $a \in \mathbb{R}^{+*}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ posons $u_n = a^n$.

1°) On suppose $a > 1$. Démontrer que $(u_n)_n$ est décroissante.

Démontrer que si l'on pose $b = a - 1$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq nb$.

En déduire que (u_n) diverge vers $+\infty$.

2°) On suppose que $a \in]0, 1[$. Démontrer que (u_n) est décroissante.

Démontrer que (u_n) converge vers 0.

E) Suites adjacentes

Il est souvent difficile de majorer convenablement $|u_n - \ell|$ dans le cas d'une suite monotone (u_n) de limite ℓ. On va voir - et c'est là leur intérêt - que c'est beaucoup plus aisé avec les suites adjacentes.

Définition

☐ On appelle suites adjacentes deux suites (a_n) et (b_n) telles que :

i) (a_n) est croissante

ii) (b_n) est décroissante

iii) $\lim\limits_{n \to +\infty} (b_n - a_n) = 0$.

Remarque

On remarquera que : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \leq b_n$. En effet, s'il existe un entier n_0 tel que : $b_{n_0} < a_{n_0}$. Donc

$$\forall n \geq n_0,\ b_n \leq b_{n_0} < a_{n_0} < a_n.$$

Il vient alors :

$$a_n - b_n \geq a_{n_0} - b_{n_0} > 0.$$

Par passage à la limite, on trouverait : $0 \geq a_{n_0} - b_{n_0} > 0$, c'est contradictoire.

Théorème

1°) Soit (a_n) et (b_n) deux suites vérifiant :

– (a_n) est croissante

– (b_n) est décroissante

– $\forall n,\ a_n \ \leq b_n$.

Alors ces deux suites convergent vers des limites a et b telles que $a \leq b$.

2°) Soit (a_n) et (b_n) deux suites adjacentes. Alors

i- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_0 \leq a_n \leq b_n \leq b_0$.

ii- ces deux suites admettent la même limite ℓ qui vérifie

$$a_n \leq \ell \leq b_n.$$

3°) Soit $[a_n, b_n]$ une suite d'intervalles fermés bornés de $\mathbb{R}$. On suppose que la suite $(b_n - a_n)$ des longueurs de ces intervalles converge vers 0 et que, pour tout entier naturel n, on ait

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n].$$

Alors l'intersection de ces intervalles est constituée d'un nombre réel ℓ et d'un seul.

Démonstration

1°) Montrons d'abord que :

$$\forall n, \forall m,\ a_n \ \leq b_m.$$

En effet :

– si $n \leq m$, on a

$$a_n \leq a_m \leq b_m.$$

– si $n > m$, on a

$$a_n \leq b_n \leq b_m.$$

Donc (a_n) est une suite croissante majorée par n'importe quel terme de la suite (b_m). Elle converge donc vers une limite a. a étant la borne supérieure de la suite (a_n), elle est inférieure à tout majorant de la suite. On a donc :

$$\forall m,\ a \leq b_m.$$

La suite (b_m) est décroissante minorée. Elle converge donc vers une limite b vérifiant :

$$a \leq b.$$

2°)
i- Il suffit de prouver que

$$\forall n,\ a_n \leq b_n$$

et d'appliquer 1°). Or, si l'on avait $a_N > b_N$ pour un certain N, alors posons

$$\varepsilon = a_N - b_N > 0.$$

On a alors :

$$\forall n > N,\ b_n \leq b_N < a_N \leq a_n,$$

d'où

$$\forall n > N,\ |a_n - b_n| \ \geq |a_N - b_N| = \varepsilon,$$

ce qui est contradictoire avec $\lim\limits_{n\to+\infty}(b_n \ - a_n) = 0$.

ii- (a_n) étant croissante et majorée par b_0, converge, ainsi que (b_n) qui est décroissante et minorée par a_0. On a donc

$$0 = \lim_{n\to+\infty} (b_n \ - a_n) = \lim_{n\to+\infty} b_n - \lim_{n\to+\infty} a_n \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} a_n = \ell.$$

ℓ étant la borne supérieure de (a_n), la borne inférieure de (b_n), on a bien

$$a_n \leq \ell \leq b_n.$$

3°) Montrons tout d'abord l'unicité d'un élément commun à tous les intervalles. Soient en effet x et x' des éléments communs à tous les intervalles $[a_n, b_n]$. Alors, on a pour tout entier naturel n :

$$|x - x'| \leq b_n - a_n.$$

Comme $(b_n - a_n)$ converge vers 0, nous voyons par prolongement des inégalités que $|x - x'|$ est nul, et donc que les nombres réels x et x' sont égaux.

Par ailleurs, il est clair que les suites (a_n) et (b_n) sont des suites adjacentes, donc sont convergentes vers une limite ℓ tel que

$$\forall n,\ a_n \leq \ell \leq b_n.$$

Cette relation montre que le nombre réel ℓ appartient à tous les intervalles$[a_n, b_n]$, ce qui achève la démonstration.

Exemple

□ Les suites babyloniennes : les babyloniens donnent comme approximation de $\sqrt{a}$ la quantité $\frac{1}{2}(b + \frac{a}{b})$ où b est un nombre arbitraire, en pratique proche de $\sqrt{a}$, par exemple sa partie entière. Le procédé peut être itéré.

Soit a un réel strictement positif. On définit les deux suites :

– b_0 est arbitraire, élément de $]\sqrt{a}, +\infty[$

– $a_n = \dfrac{a}{b^{n+1}}$

– $b_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$.

Montrons que les deux suites sont convergent vers a et que

$$\forall n,\ a_n \ \leq a \ \leq b_n.$$

Cette relation est vraie pour $n = 0$. Par ailleurs :

$$\begin{aligned} & b_{n+1} \geq \sqrt{a} \Leftrightarrow \frac{a}{b_n} + b_n \geq 2\sqrt{a} \\ \Leftrightarrow \quad & b_n^2 - 2b_n \sqrt{a} \ + a \geq 0 \\ \Leftrightarrow \quad & (b_n - \sqrt{a})^2 \geq 0 \\ & a_{n+1} = \frac{a}{b_{n+1}} \leq \frac{a}{\sqrt{a}} = \sqrt{a} \end{aligned}$$

Montrons maintenant que la suite (a_n) est croissante et (b_n) décroissante.

$$\begin{aligned} b_{n+1} - b_n &= \frac{a_n + b_n}{2} - b_n = \frac{a_n - b_n}{2} \leq 0 \\ a_{n+1} - a_n &= \frac{a}{b_{n+1}} - \frac{a}{b_n} \geq 0 \end{aligned}$$

Il en résulte que (a_n) converge vers une limite α et (b_n) vers une limite β. En passant à la limite dans les relations définissant a_n et b_n, on obtient :

$$\alpha = \frac{a}{\beta} \text{ et } \alpha = \frac{\alpha + \beta}{2} \Rightarrow \alpha\beta = a \text{ et } \alpha = \beta \Rightarrow \alpha = \beta = a.$$

□ Signalons que les suites

$$u_n = \frac{1}{2}\left(u_{n-1} + \frac{a}{u_{n-1}}\right) \text{ et } v_n = \frac{k-1}{k} v_{n-1} + \frac{a}{k v_{n-1}^{k-1}}.$$

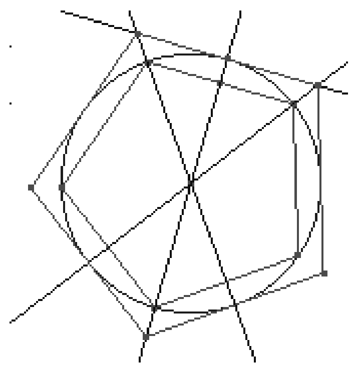
convergent respectivement vers $\sqrt{a}$ et vers $\sqrt[k]{a}$.

□ Une des applications des suites adjacentes est de prouver que le nombre d'Euler e n'est pas irrationnel.

Exemple

□ Le nombre π

Soit C un cercle de rayon 1. Pour tout entier $n \geq 2$, on désigne par a_n le périmètre d'un polygone régulier à 2^n côtés inscrit à C, puis par b_n le périmètre d'un polygone régulier à 2^n côtés circonscrit à C.



Par l'inégalité triangulaire, on a

$$a_n < a_{n+1}.$$

Par conséquent, (a_n) est une suite croissante. De façon plus formelle, on montre facilement que

$$a_n = 2^{n+1} \sin \frac{\pi}{2^{n+1}} \text{ et } b_n = 2^{n+1} \tan \frac{\pi}{2^{n+1}}.$$

Comme $\frac{\pi}{2^{n+1}} \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on a

$$a_n > 0 \text{ et } b_n > 0.$$

Par ailleurs comme

$$\sin 2x = 2 \cos x \sin x \text{ et } \tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x},$$

on a

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 2\frac{\sin \frac{\pi}{2^{n+1}}}{\sin \frac{\pi}{2^n}} = \frac{1}{\cos \frac{\pi}{2^{n+1}}} > 1 \text{ et } \frac{b_{n+1}}{b_n} = 2\frac{\tan \frac{\pi}{2^{n+1}}}{\tan \frac{\pi}{2^n}} = 1 - \tan^2 \frac{\pi}{2^{n+1}} < 1,$$

c'est-à-dire que les suites (a_n) et (b_n) sont respectivement croissante et décroissante. De plus,

$$b_n - a_n = 2^{n+1} \sin \frac{\pi}{2^{n+1}} (\frac{1}{\cos \frac{\pi}{2^{n+1}}} - 1) \Rightarrow \underset{n \to +\infty}{lim} (b_n - a_n) = 0.$$

Les suites (a_n) et (b_n) sont donc adjacentes. Leur limite commune est π qui est le périmètre du cercle C de rayon 1. Avec une calculatrice, on obtient $u_7 \approx 3,1415$.

□ Fractions continues

Soit x un nombre irrationnel positif. On construit par récurrence une suite d'entiers (a_n) et une suite de nombre irrationnels (x_n) par

$$a_0 = E[x],\, x_0 = \frac{1}{x - a_0},$$

d'où

$$x = a_0 = \frac{1}{x_0} \text{ avec } 0 < \frac{1}{x_0} < 1.$$

Pour $n \geq 1$,

$$a_n = E[x_{n-1}] \text{ et } x_n = \frac{1}{x_{n-1} - a_n}.$$

On a donc

$$x_{n-1} = a_n + \frac{1}{x_n},\, 0 < \frac{1}{x_n} < 1.$$

Plus généralement,

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots \, a_n + \frac{1}{x_n}}}}$$

Si x est un nombre rationnel, on montre que les suites (r_{2n}) et (r_{2n+1}) définies par

$$r_n = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots \, a_n}}}$$

sont adjacentes et elles convergent vers x.

Les fractions continues sont d'une grande importance dans l'étude des nombres irrationnels, plus particulièrement les nombres transcendants.

Exercice

Le nombre e

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies par

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} \text{ et } v_n = u_n + \tfrac{1}{n.n!}.$$

1°) Montrer que les suites sont deux suites adjacentes pour $n \geq 1$.

2°)

a- Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le polynôme

$$P_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}.$$

Montrer par récurrence que pour tout $x > 0$,

$$0 < e^x - P_n(x) < \frac{x^{n+1}}{(n+1)\,!}e^x \text{ et } 0 < e - u_n < \tfrac{e}{(n+1)!}.$$

b- Démontrer par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$e = \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^t dt.$$

Montrer que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^t dt = 0$.

c- Déduire de ce qui précède que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} u_n = e$.

3°) On suppose que $e = \frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}$.

a- Remarquer, que pour tout entier n,

$$0 < n!\frac{p}{q} - n!(1 + \ldots + \frac{1}{n!}) < \frac{p}{q\,(n+1)}.$$

b- Montrer que, si $n \geq q$,

$$n!\frac{p}{q} - n!(1 + \ldots +)$$

est un entier.

c- En déduire que les inégalités de a- ne sont pas réalisées pour n suffisamment grand et donc que l'hypothèse $e \in \mathbb{Q}$ est contradictoire.

4°) Montrer que la suite (u_n) donne de bonnes approximations décimales de e. En utilisant une calculatrice, donner la valeur approchée décimale à 10^{-6} près par défaut de e.

Exercice

Considérons les deux suites (u_n) et (v_n) définies par

- $(u_0, v_0) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$
- $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$
- $v_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2}$

Démontrer que ces deux suites sont adjacentes.

F) Suites extraites et théorème de Bolzano-Weierstrass

On a déjà donné la définition des suites extraites et de la notion de valeur d'adhérence.

Définition

□ Une suite (v_n) est dite une suite extraite de (u_n) s'il existe une application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $v_n = u_{\varphi(n)}$ pour tout n.

□ Un nombre réel x appelé valeur d'adhérence de la suite (u_n) si pour tout $\varepsilon > 0$, l'intervalle $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ contient une infinité de termes de la suite.

Cela revient à dire que pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} \mid |u_n - x| < \varepsilon\}$ est infini.

□ Une suite numérique (u_n) est dite de Cauchy lorsqu'on a :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2,\ q \geq p \geq N \Rightarrow |u_q - u_p| < \varepsilon.$$

Remarque

1°) Il ne suffit pas d'avoir $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+1} - u_n) = 0$ pour que la suite (u_n) soit de Cauchy. Par exemple, prenons

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

On a bien : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{n+1} \to 0$. Si la suite (u_n) était de Cauchy, alors pour $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$, il existerait N tel que :

$$\forall p,\ q \geq N,\ |u_p - u_q| < \frac{1}{2}.$$

En particulier pour $p = 2N$ et $q = N$, on a : $|u_{2N} - u_N| < \dfrac{1}{2}$. Mais

$$u_{2N} - u_N = \sum_{k=1}^{2N} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} = \sum_{k=N+1}^{2N} \frac{1}{k}.$$

Pour $k \in [[n+1, 2n]]$, on a :

$$\frac{1}{2N} \leq \frac{1}{k} < \frac{1}{N}$$

Donc :

$$u_{2N} - u_N \geq \sum_{k=N+1}^{2N} \frac{1}{2N} \geq \frac{1}{2N}\text{Card } [[n+1, 2n]] = \frac{N}{2N} = \frac{1}{2}.$$

On a à la fois : $|u_{2N} - u_N| < \frac{1}{2}$ et $u_{2N} - u_N \geq \frac{1}{2}$, ce n'est pas possible.

Profitons de l'inégalité $u_{2N} - u_N \geq \frac{1}{2}$ pour montrer que (u_n) n'est pas convergente. Si (u_n) convergeait vers une limite ℓ, alors on aurait :

$$\lim_{N \to +\infty} (\ u_{2N} - u_N) = \ell - \ell = 0 \geq \frac{1}{2}. \text{ C'est absurde!}$$

On peut aussi prendre un autre contre-exemple avec la suite $(\ln n)$.

2°) Pour vérifier qu'une suite (u_n) est de Cauchy, il ne suffit de montrer que :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N \Rightarrow |u_{n+1} - u_n| < \varepsilon.$$

Par exemple, considérons la suite (u_n) définie par : $u_n = \ln n$. Alors on a :

$$|u_{n+1} - u_n| = \ln(1 + \frac{1}{n}) \leq \frac{1}{n} = \varepsilon.$$

On peut prendre $N = \frac{1}{\varepsilon}$ et on a :

$$\forall n \geq N \Rightarrow |u_{n+1} - u_n| < \varepsilon.$$

On verra un peu plus tard qu'une suite qui ne converge pas n'est pas de Cauchy. Ici la suite (u_n) ne converge pas, donc elle n'est pas de Cauchy.

Propriété

1°) Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application strictement croissante. Alors : $\forall n \in \mathbb{N}$, on a : $n \leq \varphi(n)$.

En particulier, $\varphi(n) \to +\infty$ quand $n \to +\infty$.

2°) Si une suite $(u_n)_n$ de réels converge vers ℓ, alors toute suite extraite converge vers la même limite. De même pour les suites extraites de suites tendant vers $+\infty$ ou $-\infty$.

3°) Pour qu'une suite (u_n) soit convergente, il faut et il suffit que les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) soient convergentes et que leurs limites soient égales.

Preuve

1°) Pour $n = 0$, $\varphi(0) \in \mathbb{N}$ donc $\varphi(0) \geq 0$. La propriété est vraie pour $n = 0$.

Supposons que cette propriété soit vraie pour n fixé. Démontrons la pour $(n+1)$. On a : $n \leq \varphi(n)$ par hypothèse de récurrence. Comme φ est strictement croissante, on a : $\varphi(n) < \varphi(n+1)$.

Or : $n \leq \varphi(n)$, donc $n < \varphi(n+1)$. On en déduit que $n + 1 \leq \varphi(n+1)$ car $\varphi(n+1) \in \mathbb{N}$.

2°) Soit (u_n) une suite numérique et $(v_n) = (u_{\varphi(n)})$ une suite extraite de (u_n) où $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application strictement croissante. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\lim u_n = \ell$, on a :

$$\exists p \in \mathbb{N} | \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq p \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

Si $n \geq p$, alors on a : $\varphi(n) \geq p \Rightarrow |u_{\varphi(n)} - \ell| < \varepsilon$.

En conclusion, on a : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists p \in N$, $\forall n \geq p \Rightarrow |v_n - \ell| < \varepsilon$.

On traiterait de même les limites infinies.

3°) Si (u_n) converge vers une limite ℓ, alors toutes les suites extraites de (u_n) convergent vers ℓ.

Réciproquement, si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{2n} = \ell$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{2n+1} = \ell$, alors

$$\exists(n_1,n_2)\in\mathbb{N}^2,\ \forall p\in\mathbb{N},\ (p>n_1\Rightarrow|u_{2p}-\ell|<\varepsilon)\text{ et }(p>n_2\Rightarrow|u_{2p+1}-\ell|<\varepsilon).$$

Posons $N=\max\{2n_1,2n_2+1\}$. Alors, pour tout $n>N$, il existe un entier p tel que $n=2p$ ou $n=2p+1$. Distinguons deux cas :

Si $n=2p$, alors

$$|u_n-\ell|=|u_{2p}-\ell|.$$

Par ailleurs si $2p>2n_1$, alors $p>n_1$, ce qui implique

$$|u_n-\ell|=|u_{2p}-\ell|<\varepsilon.$$

Si $n=2p+1$, alors

$$|u_n-\ell|=|u_{2p+1}-\ell|.$$

Par ailleurs si $2p+1>2n_2$, alors $p>n_2$, ce qui implique

$$|u_n-\ell|=|u_{2p+1}-\ell|<\varepsilon.$$

Ceci montre que $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\ell$.

Remarque

La réciproque de cette propriété 2°) est fausse. Par exemple, on peut étudier $u_n=(-1)^n$ qui n'est pas convergente, mais u_{2n} et u_{2n+1} sont convergentes.

On utilise souvent ce théorème pour chercher la limite des suites récurrentes linéaires : $u_{n+1}=f(u_n)$.

Théorème (caractérisation des valeurs d'adhérence)

> Le nombre réel x est valeur d'adhérence de la suite (u_n) si et seulement s'il existe une suite extraite de (u_n)de limite x.

Preuve

Supposons qu'il existe une suite extraite $(u_{\varphi(n)})$ de limite x, alors pour tout $\varepsilon>0$, l'intervalle $]x-\varepsilon,x+\varepsilon[$ contient une infinité de termes de la suite $(u_{\varphi(n)})$ donc une infinité de termes de la suite (u_n) car il existe N tel que : $\forall n\geq N$, $|u_{\varphi(n)}-x|<\varepsilon$. On a donc : x est valeur d'adhérence de (u_n).

Réciproquement, si x est valeur d'adhérence de (u_n), il s'agit de construire $\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(u_{\varphi(n)})$ ait pour limite x. Cette construction se fait par récurrence. Posons $\varphi(0)=0$. On prend $\varphi(1)\in\mathbb{N}$ tel que : $|u_{\varphi(1)}-x|<1$. Puis on observe que $\{n\in\mathbb{N}\mid |u_n-x|<1/2\}$ est infini, donc $\varphi(2)>\varphi(1)$. On suppose ensuite que l'on ait réussi à définir φ strictement croissante sur $\{0,1,2,...,n\}$ de façon que $|x-u_{\varphi(n)}|\leq\dfrac{1}{p}$ pour tout $1\leq p\leq n$. Puisque x est valeur d'adhérence de (u_n), il existe $N\geq\varphi(n)+1$ tel que $|x-u_N|\leq\dfrac{1}{n+1}$: nous posons donc $\varphi(n+1)=N$. φ est donc définie et strictement croissante sur $\{0,1,2,....,n+1\}$ de façon que : $|x-u_{\varphi(p)}|\leq\frac{1}{p}$ pour tout $1\leq p\leq n+1$. Par récurrence, nous avons donc défini $\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ strictement croissante telle que : $|x-u_{\varphi(n)}|\leq\dfrac{1}{n}$ pour tout $n\geq1$, donc $\lim\limits_{n\to\infty}u_{\varphi(n)}=x$.

Remarque

L'ensemble des valeurs d'adhérence peut être un ensemble finie, infinie ou même un ensemble fini non dénombre. La suite $u_n = \cos n$ admet $[-1, 1]$ comme ensemble des valeurs d'adhérence. Si f est définie par $f : x \mapsto \tanh^{-1}(x)$ de $]-1, 1[$ dans $\mathbb{R}$, alors la suite $v_n = f(u_n)$ admet $\mathbb{R}$ comme ensemble de valeurs d'adhérence.

Théorème (de Bolzano-Weierstrass)

1°) Une suite bornée admet au moins une valeur d'adhérence.

En d'autres termes, on peut extraire une suite convergente de toute suite réelle bornée.

2°) Si (u_n) est une suite réelle non majorée (resp. non minorée), alors il existe une extraction φ telle que $u_{\varphi(n)}$ tend vers $+\infty$.

3°) Toute suite complexe bornée admet une valeur d'adhérence.

Preuve

1°) On va donner une démonstration du théorème de Bolzano-Weierstrass utilisant les suites adjacentes : de toute suite bornée de réels, on peut extraire une sous-suite convergente.

Soit (x_n) une suite bornée de réels. Il existe alors des réels a et b tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a \leq x_n \leq b$. Posons $I_0 = [a, b]$ et construisons une suite d'intervalles emboîtés I_1, I_2, ..., $I_n = [a_n, b_n]$ ... de longueur

$$\frac{b-a}{2}, \frac{b-a}{2^2}, \ldots, \frac{b-a}{2^n}$$

de façon à ce que chaque intervalle I_n contient un terme $x_{\varphi(n)}$ en respectant la condition $\varphi(n) > \varphi(n-1)$. Pour cela posons,

$$c_n = \frac{a_n + b_n}{2}, \ A_n = \{m \in \mathbb{N}, x_m \in [a_n, c_n]\} \text{ et } B_n = \{m \in \mathbb{N}, x_m \in [c_n, b_n]\}.$$

Il est alors clair que $A_n \cup B_n$ est infini. Si A_n est infini, on pose $I_{n+1} = [a_n, c_n]$. Dans le cas contraire, on pose $I_{n+1} = [c_n, b_n]$. Comme la longueur de ces intervalles converge vers 0 et pour tout entier naturel n, on a : $I_{n+1} \subset I_n$, l'intersection de ces intervalles est constituée d'un nombre réel x_0 et d'un seul. On a alors

$$|x_{\varphi(k)} - x_0| \leq b_k - a_k \to 0.$$

La suites extraite $(x_{\varphi(n)})$ converge bien vers x_0.

Méthode 2

Par le théorème de Ramsay, on peut extraire une sous-suite monotone. Si elle est croissante, elle est croissante majorée, donc convergente. Si elle est décroissante, elle est décroissante minorée, donc convergente.

2°) Par récurrence, on construit une extraction φ telle que $u_{\varphi(n)} \geq k$.

3°) Soit (u_n) une suite complexe bornée. On pose $u_n = x_n + iy_n$ où (x_n) et (y_n) sont des suites réelles bornées. Par le théorème de Bolzano Weierstrass, il existe une extraction φ et $x \in \mathbb{R}$ telle que $x_{\varphi(n)}$ tend vers x. De même, il existe une extraction ψ et $y \in \mathbb{R}$ tel que $y_{(\varphi\circ\psi)(n)}$ tend vers y. Au total, $u_{(\varphi\circ\psi)(n)}$ tend vers $x + iy$ car $x_{(\varphi\circ\psi)(n)}$ est extraite de $x_{\varphi(n)}$, donc converge vers x.

Corollaire

Une suite bornée admettant une seule valeur d'adhérence est convergente.

Preuve

Soit une suite bornée (u_n) ayant une seule valeur d'adhérence λ et supposons qu'elle ne convergeait pas vers ℓ. Alors il existerait $\varepsilon > 0$ et une extraction φ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{\varphi(n)} - \ell| \geq \varepsilon$. Mais $u_{\varphi(n)}$ est bornée, donc nous pouvons extraire une suite $u_{\varphi\circ\phi(n)}$ convergente vers ℓ'. Comme $|u_{\varphi\circ\phi(n)} - \ell| \geq \varepsilon$, on a : $|\ell' - \ell| \geq \varepsilon$, d'où $\ell \neq \ell'$ qui est valeur aussi d'adhérence de (u_n), ce qui est contradictoire.

Remarque

1°) La condition que (u_n) soit bornée est essentielle. Par exemple, la suite (u_n) définie par $u_n = n[1 + (-1)^n]$ est une suite non bornée qui admet 0 comme seule valeur d'adhérence (u_{2n+1} tend vers 0, u_{2n} n'a pas de limite). Elle ne converge pas. On peut aussi prendre l'exemple suivant : $u_n = n^{(\ -1)^n}$.

2°) Une suite convergente admet une valeur d'adhérence et une seule.

Exemple

☐ Soit (u_n) une suite bornée telle que $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+1} - u_n) = 0$.

Montrons que l'ensemble des valeurs d'adhérence de (u_n) est un intervalle. Soient x et y deux valeurs d'adhérence de (u_n) avec $x < y$. Il suffit de montrer que tout $z \in]x, y[$ est une valeur d'adhérence de (u_n). Si z n'était pas valeur d'adhérence de (u_n), alors il existerait $\varepsilon > 0$ tel que $]z - \varepsilon, z + \varepsilon[\bigcap]x, y[$ ne contient pas u_n pour $n \geq N$. Comme $\mathop{lim}\limits_{n\to+\infty}(u_{n+1} - u_n) = 0$, on aurait :

$$\exists N_1 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N_1,\ |u_{n+1} - u_n| < \varepsilon.$$

Pas réussir à finir, on verra la prochaine fois, je suis découragé !

☐ Soit (u_n) une suite bornée telle que $\mathop{lim}\limits_{n\to+\infty}(u_n + \frac{u_n}{2}) = \ell \in \mathbb{R}$. Montrons que (u_n) est convergente. Pour cela, on peut montrer que (u_n) a une seule valeur d'adhérence. Soit α une valeur d'adhérence de (u_n). Existe-t-il une autre valeur d'adhérence de (u_n) ? Comme (u_n) est bornée, il existe une extraction φ telle que $u_{\varphi(n)}$ converge vers α. Or

$$\lim_{n\to+\infty}(\ u_{\varphi(n)} + \frac{u_{\varphi(n)}}{2}) = \ell \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_{\varphi(n)} = 2(\ell - \alpha).$$

☐ Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que : $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n^3 + v_n^3) = 0$. Montrons que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} v_n = 0.$$

☐ Soit (z_n) une suite complexe telle que pour tout $a \in \mathbb{C}$, $|z_n - a|$ converge. Montrons que (z_n) converge. Pour $a = 0$, $|z_n|$ converge, donc $|z_n|$ est bornée. Si a est une valeur d'adhérence de z_n, alors $z_{\varphi(n)}$ tend vers a, donc $|z_{\varphi(n)} - a|$ tend vers 0. Or $|z_n - a|$ converge, donc $|z_n - a|$ tend vers 0.

Théorème

> 1°) Toute suite de Cauchy numérique est bornée.
>
> 2°) Une suite réelle est convergente si et seulement si elle est de Cauchy.

Preuve

1°) Soit (u_n) une suite de Cauchy. On a alors :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall (p, q) \in \mathbb{N}^2,\ p,\ q \geq N \Rightarrow |u_q - u_p| < \varepsilon.$$

En particulier pour $\varepsilon = 1$, il existe N' tel que :

$$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2,\ q \geq p \geq N' \Rightarrow |u_q - u_p| < 1.$$

Prenons $p = N$, on a alors :

$$q \geq N \Rightarrow |u_q - u_N| < 1 \Rightarrow u_N - 1 \leq u_q \leq u_N + 1.$$

En posant $M = \max\{|u_0|, |u_1|, \ldots, |u_{N-1}|, |u_N| + 1\}$, on voit que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leq M$ et donc :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [-M, M].$$

La suite (u_n) est donc bornée.

2°) Soit (u_n) une suite convergente vers ℓ. On peut alors écrire :

$$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \Rightarrow |u_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Si $p \geq N$, alorson a toujours : $|u_p - \ell| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

De même pour $q \geq N$: $|u_q - \ell| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Donc :

$$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2,\ p,\ q \geq N \Rightarrow |u_q - u_p| = |u_q - \ell + \ell - u_p| \leq |u_q - \ell| + |u_p - \ell| \leq \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

La suite (u_n) est ainsi une suite de Cauchy.

Réciproquement si (u_n) est une suite de Cauchy, alors on sait qu'elle est bornée. D'après le théorème Bolzano-Weierstrass, on peut extraire de (u_n) une sous-suite $(u_{\varphi(n)})$ convergente. Posons $\lambda = \underset{n \to +\infty}{lim} u_{\varphi(n)}$ et montrons que (u_n) converge aussi vers ℓ. Fixons $\varepsilon > 0$. Comme (u_n) est de Cauchy et $(u_{\varphi(n)})$ converge, on peut écrire :

$$\exists N_1 \in \mathbb{N},\ \forall p \geq N_1 \Rightarrow |u_{\varphi(p)} - \ell| < \tfrac{\varepsilon}{2}.$$
$$\exists N_2 \in \mathbb{N},\ \forall (i,j) \in \mathbb{N}^2,\ i,\ j \geq N_2 \Rightarrow |u_i - u_j| < \tfrac{\varepsilon}{2}.$$

Si $n \geq N = \max\{N_1, N_2\}$, alors on a :

$$|u_n - \ell| \leq |u_n - u_{\varphi(n)}| + |u_{\varphi(n)} - \ell| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

car $\varphi(n) \geq n \geq N$. Et on a fini !

Remarque

Un corps tel que toute suite de Cauchy converge est dite complet.

Exemple

□ Soit (u_n) une suite numérique. Posons

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_n \text{ et } T_n = \sum_{k=0}^{n} |u_n|.$$

Montrons que si (T_n) converge, il en est de même de (S_n). Comme (T_n) converge, c'est une suite de Cauchy. Soit $\varepsilon > 0$, on a : $\exists N \in \mathbb{N},\ \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2,\ p \geq q \geq N \Rightarrow |T_p - T_q| < \varepsilon$.

Calculons maintenant :

$$|S_p - S_q| = \left| \sum_{k=0}^{p} u_k - \sum_{k=0}^{q} u_k \right| = \left| \sum_{k=q+1}^{p} u_k \right| \leq \sum_{k=q+1}^{p} |u_k| = T_p - T_q = |T_p - T_q| < \varepsilon.$$

La suite (S_n) est de Cauchy, elle converge donc.

G) Propriétés liées à l'ordre

Théorème

Soient (u_n) et (v_n) deux suites qui convergent respectivement vers ℓ et ℓ'.

1°) si $\ell < \ell'$, alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n > n_0 \Rightarrow u_n < v_n$. La réciproque est fausse.

2°) S'il existe n_0 tel que pour tout $n > n_0$, $u_n \leq v_n$, alors $\ell \leq \ell'$.

Preuve

1°) Soit $\varepsilon = \frac{\ell'-\ell}{2}$, alors $\varepsilon \in \mathbb{R}^{*+}$, donc il existe N et N' tels que

$$n > N \Rightarrow u_n \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$$

et

$$n > N' \Rightarrow v_n \in]\ell' - \varepsilon, \ell' + \varepsilon[.$$

Soit $n_0 = \max\{N, N'\}$, alors pour $n > n_0$, on a :

$$u_n \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[\text{ et } v_n \in]\ell' - \varepsilon, \ell + \varepsilon[.$$

Or

$$\ell + \varepsilon = \ell' - \varepsilon = \frac{\ell + \ell'}{2},$$

donc

$$u_n < \frac{\ell + \ell'}{2} < v_n,\ n > n_0.$$

Pour voir que la réciproque est fausse, on peut se donner un exemple. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il est clair que l'on a

$$\frac{1}{n} < \frac{2}{n}.$$

Mais

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n} = 0.$$

2°) On suppose qu'il existe n_0 tel que pour $n > n_0$ on ait

$$u_n \leq v_n.$$

Montrons par l'absurde que

$$\ell \leq \ell'.$$

Si $\ell' < \ell$, alors il existe n_1 d'après 1°) tel que pour tout $n > n_1$, on a

$$v_n < u_n.$$

Soit $n = \max\{n_0 + 1, n_1 + 1\}$, alors

$$n > n_0,$$

donc

$$u_n \leq v_n.$$

De même, on a

$$n > n_1,$$

donc

$$v_n < u_n.$$

Remarque

Soit $1 - \dfrac{1}{n} < 1$, mais $\lim\limits_{n\to+\infty}(1 - \dfrac{1}{n}) = 1$.

Donnons maintenant le théorème des sandwichs. Pour ceux qui aiment des big mac, ça sera le théorème des big mac :

Théorème (des sandwichs)

1°) Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites réelles. Si à partir d'un certain rang n_0 on a

$$u_n \leq w_n \leq v_n$$

et si $(u_n)_n$ et (v_n) convergent vers le même réel ℓ, alors (w_n) converge vers ℓ.

2°) Soient (v_n), (w_n) deux suites réelles et ℓ un réel. Si à partir d'un certain rang on a

$$|w_n - \ell| \leq v_n$$

et si (v_n) converge vers 0, alors (w_n) converge vers ℓ.

Preuve

1°) Soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèse il existe n_0 et n_1 tel que

$$n > n_0 \Rightarrow u_n \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$$

et

$$n > n_1 \Rightarrow v_n \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[.$$

De plus, il existe N_0 tel que

$$n > N_0 \Rightarrow u_n \leq w_n \leq v_n.$$

On pose $N = \max\{N_0, N_1, n_0\}$, alors pour $n > N$, on a

$$\ell - \varepsilon < u_n \leq w_n \leq v_n < \ell + \varepsilon,$$

d'où

$$|w_n - \ell| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} w_n = \ell.$$

2°) en écrivant

$$0 \leq |w_n - \ell| \leq v_n.$$

Exercice

1°) Montrer que pour tout $(n, p) \in \mathbb{N}^{*2}$

$$n^p \geq n.$$

En déduire que la suite $\left(\frac{1}{n^p}\right)$ converge vers 0.

2°) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\sin n}{n}$.

H) Applications à l'approximation des nombres réels

Définition

☐ On appelle chiffre tout nombre entier compris entre 0 et 9 et suite décimale toute suite de chiffres (a_n).

☐ On appelle développement décimal illimité une écriture $a_0, a_1 ... a_n ....$ où (a_n) est une suite décimale :

$$a_0, a_1 ... a_n .... = \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{a_q}{10^q} \ , \ a_q \in [[0, 9]].$$

☐ On appelle représentation décimale de $x \in \mathbb{R}$, toute suite décimale (a_n) telle que

$$x = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{10^k}.$$

☐ Soit $x \in \mathbb{R}$ et (a_n) la suite décimale qui représente x. Le nombre décimale $d_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{10^k}$ est appelé l'approximation décimale par défaut à 10^{-n} près de x et le nombre décimal $d_n + \frac{1}{10^n}$ l'approximation décimale par excès à 10^{-n} près de x.

Lemme

Soit $x \in \mathbb{R}$, on considère la suite définie par

$$d_0 = E[x] \text{ et } d_n = E[10^n x] - 10E[10^{n-1}x].$$

La suite (d_n) est une suite d'entiers relatifs pour $n \geq 1$, $0 \leq d_n \leq 9$.

Preuve

Il est clair que $d_n \in \mathbb{Z}$. Par définition de la partie entière, on a pour $n > 0$

$$10^n x - 1 < E[10^n x] \leq 10^n x \ (1)$$
$$10^{n-1} x - 1 < E[10^{n-1} x] \leq 10^{n-1} x \ (2)$$

La multiplication de chaque terme de (2) par (1) donner

$$-10^n x \leq -10E[10^{n-1}x] < 10^n x - 10 \ (3).$$

De (1) et (3), on déduit

$$-1 < E[10^n x] - 10^E[10^{n-1}x] < 10,$$

d'où d_n étant un entier

$$0 \leq d_n \leq 9.$$

Théorème

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on définit

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \tfrac{E[10^n x]}{10^n} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{10^n}.$$

1°) u_n et v_n sont des décimaux.

2°) (u_n) et (v_n) sont adjacentes et convergent vers x.

3°) u_n est une valeur approché par défaut à 10^{-n} près de x.

v_n est une valeur approchée par excès à 10^{-n} près de x.

4°) On a $u_N = x$ pour un entier N si et seulement si x est un nombre décimal.

Preuve

1°) C'est évident puisque $E[10^n x] \in \mathbb{Z}$.

2°) Par définition de la partie entière, on a

$$E[10^n x] \leq 10^n\ x < E[10^n\ x] + 1 \qquad (*)$$

En multipliant la première inégalité 10, on obtient

$$10E[10^n x] \leq 10^{n+1}\ x.$$

Comme $10E[10^n x] \in \mathbb{Z}$, il vient

$$10E[10^n x] \leq E[10^{n+1}\ x] \Rightarrow \frac{E\left[10^n x\right]}{10^n} \leq \frac{E\left[10^{n+1} x\right]}{10^{n+1}} \Rightarrow u_n \leq u_{n+1}.$$

La suite (u_n) est donc croissante. Pour la suite (v_n), on calcule d'après le lemme ci-haut

$$v_{n+1} - v_n = \tfrac{1}{10^{n+1}}[1 + d_{n+1} - 10] \leq 0.$$

Donc la suite (v_n) est décroissante.

Par ailleurs,

$$v_n - u_n = \frac{1}{10^n} \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} (\ v_n - u_n) = 0.$$

Les suites (u_n) et (v_n) sont donc adjacentes.

Maintenant, si nous multipliant par 10^{-n}, on obtient

$$\frac{E\left[10^n x\right]}{10^n} \leq x < \frac{E\left[10^n x\right]}{10^n} + \frac{1}{10^n} \Rightarrow u_n \leq x < v_n, \text{ pour tout } n.$$

Cette relation montre que la limite commune de (u_n) et de (v_n) est x.

3°) Comme $(v_n - u_n) = 10^{-n}$, on a

$$0 \leq x - u_n < 10^{-n} \text{ et } 0 < v_n - x \leq 10^{-n}.$$

On en déduit que u_n et v_n sont bien des valeurs approchées respectivement par défaut et par excès de x à 10^{-n}.

4°) Comme u_n est un nombre décimal, $u_N = x$ implique que x est décimal pour un entier N.

Réciproquement, supposons que x soit un nombre décimal. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $10^N x \in \mathbb{Z}$. Soit $p > N$, on a : $10^p x \in \mathbb{Z}$ et

$$d_p = E[10^p x] - 10^E[10^{p-1}x] = 10^p x - 10.10^{p-1}x = 0$$

et

$$x = u_N.$$

III) Etudes de suites

Etudier une suite, c'est déterminer si cette suite est convergente ou non. On étudie sa monotonie. Si cela est possible, on détermine sa limite.

A) La comparaison locale

Définition

☐ Une suite réelle (u_n) est négligeable devant une suite (v_n) et on note u_n =o(v_n) ou $u_n << v_n$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |u_n| \leq \varepsilon |v_n|.$$

Si v_n est non nulle, cela signifie que $\frac{u_n}{v_n}$ tend vers 0. Dans la pratique, c'est plutôt cela qu'on utilise.

☐ Une suite (u_n) est dominée par une suite (v_n) et on note u_n =O(v_n) s'il existe une constante A telle que, pour tout n, $|u_n| \ \leq A|v_n|$.

Si v_n est non nulle, cela signifie que la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ est bornée.

☐ Une suite (u_n) est équivalente à une suite (v_n) si

- ces suites ne s'annulent pas ;

- $u_n - v_n$ =o(v_n).

Ceci signifie que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$.

Remarque

Les notations petit o, grand O et $\sim$ sont dues à Landau. La notation $<<$ est due à Hardy.

Propriété

Soient (u_n), (v_n), (w_n) et (t_n) quatre suites numériques dont les termes sont non nuls à partir d'un certain rang.

1°) Si u_n =o(v_n) et v_n =o(w_n), alors u_n =o(w_n).

2°) Si u_n =o(w_n) et v_n =o(w_n), alors $u_n + v_n$ =o(w_n).

3°) Si u_n =o(w_n) et v_n =o(t_n), alors $u_n v_n$ =o$(w_n t_n)$.

Preuve

On a par hypothèse :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \frac{v_n}{w_n} = 0.$$

D'où

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n}\frac{v_n}{w_n} = \underset{n\to+\infty}{lim} \frac{u_n}{w_n} = 0.$$

Donc $u_n =\text{o}(w_n)$.

Propriété (de comparaison indirecte)

Soit (u_n) et (v_n) deux suites de réels strictement positifs telles qu'à partir d'un certain rang : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$, alors, $u_n =\text{O}(v_n)$.

Preuve

La suite $(\dfrac{u_n}{v_n})$ est décroissante à partir d'un certain rang car :

$$\frac{\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}}}{\frac{u_n}{v_n}} = \frac{u_{n+1}}{u_n}\frac{v_{n+1}}{v_n} = 1.$$

Posons $A = \frac{u_N}{v_N}$, alors on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\, n \geq k \Rightarrow \tfrac{u_n}{v_n} \leq A.$$

On a donc :

$$\exists A > 0,\, \exists N \in \mathbb{N},\, \forall n \in \mathbb{N},\, n \geq N \Rightarrow |u_n| \leq A.|v_n|.$$

Propriété

La relation $\sim$ entre les suites est une relation d'équivalence.

Preuve

Réflexitivité :

Symétrique : Soit (u_n) et (v_n) deux suites de réels équivalentes. Alors on a : $u_n - v_n =\text{o}(v_n)$. On peut alors écrire :

$$\forall \varepsilon > 0,\, \exists N \in \mathbb{N},\, \forall n \in \mathbb{N},\, n \geq N \Rightarrow |u_n - v_n| \leq \varepsilon |v_n|.$$

En écrivant : $v_n = v_n - u_n + u_n$, on voit que :

$$|v_n| \leq |v_n - u_n| + |u_n| \leq \varepsilon|v_n| + |u_n| \Rightarrow |v_n| \leq \frac{|u_n|}{1-\varepsilon}.$$

En posant $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\, n \geq N \Rightarrow |u_n - v_n| \leq \varepsilon'|u_n|$.

La **T**ransitivité est laissée parce que j'ai la flemme.

Propriété

Soit (u_n), (v_n), (w_n) et (t_n) quatre suites numériques.

1°) Si $u_n \sim v_n$ et $v_n \sim w_n$, alors $u_n \sim w_n$.

2°) Si $u_n \sim w_n$ et $v_n \sim t_n$, alors $u_n v_n \sim w_n t_n$.

3°) Si $u_n \sim w_n$ et $v_n \sim t_n$, alors $\frac{u_n}{v_n} \sim \frac{w_n}{t_n}$.

Remarque

1°) On ne dispose pas de résultat analogue pour la somme. Par exemple, on a : $n^2 + n \sim n^2$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2+n}{n^2} = 1$.

De même puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-n^2+1}{-\,n^2} = 1$, on a : $-n^2 \sim -n^2+1$. En ajoutant, on a :

$$n^2 + n - n^2 = n \text{ et } n^2 - n^2 + 1 = 1.$$

Mais il est clair que $n \sim 1$.

2°) Donc dans les calculs, on n'emploie pas les $\sim$ sauf dans le cas très particulier où il n'y a que les opérations de multiplication et de division.

3°) Attention aussi aux compostions par les fonctions exponentielles et logarithmiques :

$$u_n \sim v_n \text{ n'implique pas } e^{u_n} \sim e^{v_n}$$
$$u_n \sim v_n \text{ n'implique pas } \ln(u_n) \sim \ln(v_n).$$

Prenons par exemple : $u_n = n^2 + n$ et $v_n = n^2$. On a bien : $\mathop{lim}\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$, mais :

$$e^{u_n} = e^{n^2} e^n = e^{v_n} e^n \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{e^{u_n}}{e^{v_n}} = \lim_{n\to+\infty} e^n = +\infty.$$

Pour la fonction ln, prenons $x_n = 1 + \dfrac{1}{n}$ et $y_n = 1 - \frac{1}{n^2}$. On a bien : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = 1$, mais

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(x_n)}{\ln(y_n)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)}{-\frac{1}{n^2} + \mathrm{o}(\frac{1}{n^2})} = -\infty.$$

Théorème

Soit (u_n) et (v_n) deux suites telles que $u_n \sim v_n$.

1°) Alors (u_n) et (v_n) sont de même nature.

2°) Si (u_n) converge vers ℓ, alors (v_n) converge aussi vers ℓ.

3°) Si (u_n) diverge vers $+\infty$, alors (v_n) diverge vers $+\infty$.

4°) Si (u_n) diverge vers $-\infty$, alors (v_n) diverge vers $-\infty$.

Preuve

Il suffit d'écrire : $v_n = \dfrac{v_n}{u_n} u_n$ et de passer à la limite sachant que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{v_n}{u_n} = 1$. Par symétrie, on constate que (u_n) et (v_n) sont de même nature.

On dispose de suites de références :

Propriété

1°) Suites tendant vers $+\infty$:

$$(\ln n)^\alpha << n^\beta << a^n << n! \text{ pour } \alpha > 0,\ \beta > 0,\ a > 1.$$

2°) Suites tendant vers 0 :

$$\frac{1}{n!} << k^n << \frac{1}{n^\beta} << \frac{1}{(\ln n)^\alpha}, \text{ pour } \alpha > 0,\ \beta > 0,\ k < 1.$$

Preuve

1°) Pour vérifier que $(\ln n)^\alpha = o(n^\beta)$, calculons :

$$\frac{(\ln n)^\alpha}{n^\beta} = \frac{\exp\left(\alpha \ln\left(\ln n\right)\right)}{\exp\left(\beta \ln n\right)} = \exp(\alpha \ln(\ln n) - \beta \ln n) = \exp[\ln(\ln n)(\alpha \frac{\ln\left(\ln n\right)}{\ln n} - \beta)] \to 0.$$

Vérifions maintenant que : $n^\beta = o(a^n)$. Calculons :

$$\frac{n^\beta}{a^n} = \frac{\exp\left(\beta \ln n\right)}{\exp\left(n \ln a\right)} = \exp(\beta \ln n - n \ln a) = \exp[n(\beta \frac{\ln n}{n} - \ln a)] \to 0.$$

Montrons que : $a^n = o(n!)$. Posons $u_n = \dfrac{a^n}{n!}$.

Alors

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{a^n} = \frac{a}{n+1} = 0.$$

Il existe donc un rang n_0 à partir duquel, on a :

$$0 < \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow u_{n+1} \leq \frac{1}{2} u_n.$$

On écrit :

$$\begin{gathered} 0 < u_{n+1} \leq \frac{1}{2} u_n \\ 0 < u_n \leq \tfrac{1}{2} u_{n-1} \\ \ldots \\ 0 < u_{n_0} + 1 \leq \frac{1}{2} u_{n_0} \end{gathered}$$

En faisant le produit et en simplifiant, on obtient :

$$u_{n+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0+1} u_{n_0}.$$

La suite (u_n) converge donc.

2°) C'est une conséquence de 1°).

Exemple

☐ Soit (u_n) une suite strictement croissante telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$.

Si $\ell > 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Si $\ell < 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Terminons ce paragraphe sur les développements asymptotiques et donnons une réciproque du théorème de Césaro :

Propriété

Soit $u = (u_n)$ et $v = (v_n)$ deux suites. Définissons la relation suivante :

$$u < v \Leftrightarrow u << v \text{ ou } u \sim v.$$

Alors $<$ est une relation d'ordre.

Définition

□ On appelle échelle de comparaison une famille de E de suites telle que si (u_n) et (v_n) appartiennent à E, alors soit $u_n = v_n$, $u_n << v_n$ ou soit $v_n << u_n$. Les familles $\{n\alpha, \alpha \in \mathbb{R}\}$ et $\{n\alpha$ (ln $n)\beta, \alpha, \beta \quad \in \mathbb{R}\}$ en sont des exemples.

□ On dit qu'une suite $(_n)$ admet un développement asymptotique à k terme par rapport à l'échelle de comparaison E si on peut l'écrire sous forme :

$$u_n = c_1 v_n^1 + ... + c_k v_n^k + \mathrm{o}(v_n^k) \text{ avec } (v_n^i) \in E \text{ et } v_n^{i+1} = \mathrm{o}(w_n^i).$$

Propriété

Les développements asymptotiques sont stables sous les opérations usuels de troncature, d'addition, de multiplication et de composition.

Propriété

Soit (u_n) une suite vérifiant $|u_n - u_{n+1}| = \mathrm{O}(\frac{1}{n})$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_1+u_2+...+u_n}{n} = \ell$. Alors (u_n) tend vers ℓ.

B) Suites récurrentes

Définition

□ Soit I un intervalle réel et $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que I est stable par f lorsqu'on a : $f(I) \subset I$.

□ Une application $f : I \to I$ est dite contractante (ou c'est une contraction) si et seulement si :

$$\exists k \in]0,1[,\ \forall (x,y) \in I^2,\ |f(x) - f(y)| \leq k|x-y|.$$

□ Les solutions de l'équation $f(x) = x$ s'appelle les points fixes.

□ Soit $f : I \to I$ une fonction de classe C^1. Un point ω fixe de f est dit attractif si et seulement si $|f'(\omega)| < 1$, répulsif si et seulement si $|f'(x)| > 1$. Lorsque $f'(\omega) = 0$, ω est dit super-attractif.

□ Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et (u_n) la suite définie par son premier terme $u_0 = a \in \mathbb{R}$ et la relation de récurrence : $u_{n+1} = f(u_n)$.

Remarque

1°) On verra au chapitre sur la dérivation que si une application f vérifie $|f\prime| \leq k$, alors f vérifie :

$$\forall (x,y) \in I^2,\ |f(x) - f(y)| \leq k|x-y|.$$

2°) Soit $f : I \to I$ une fonction de classe C^1 et ω un point fixe de f. Remarquez que l'on n'a pas défini le cas où $|f'(\omega)| = 1$, c'est normal car c'est un cas litigieux.

Exemple

☐ L'intervalle $[\frac{\pi}{4}, 1]$ est stable par $f(x) = \sin 2x$: $f([\frac{\pi}{4}, 1]) = [\sin 2, 1] \subset [\frac{\pi}{4}, 1]$.

☐ Le point 3 est un point fixe de $f(x) = \sqrt{2x+3}$.

☐ Soit $f(x) = 2.\exp(x-2)$. Alors f admet deux points fixes, l'un attractif, l'autre répulsif.

Il est commode d'utiliser un graphique.

Propriété

1°) Soit f une application de numérique et I une partie stable de f. Si a est donné, il existe une unique suite (u_n) définie par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ et la condition $u_0 = a$ et pour tout n, $u_n \in I$.

2°) Soit (u_n) une suite vérifiant la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ et la condition $u_0 = a$. Si (u_n) converge vers ℓ et si f est continue en ℓ, alors ℓ est un point fixe de f.

Preuve

1°) Considérons l'application $h : x \mapsto f(x)$. Nous pouvons définir la suite (v_n) d'applications par récurrence de la manière suivante : $v_0 = Id_I$ et $u_{n+1} = h \circ h_n$. Il est alors clair que (u_n) vérifie $u_0 = a$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ si et seulement si : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n(a)$. On en déduit l'existence et l'unicité de la suite (u_n).

2°) f étant continue, on passe à la limite.

Propriété

Supposons f croissante :
1°) si $u_0 \leq u_1 = f(u_0)$, alors la suite (u_n) est croissante ;

2°) si $u_0 \geq u_1$, alors (u_n) est décroissante.

Dans les deux cas, (u_n) est une suite monotone. En particulier si I est un segment, (u_n) est monotone et bornée, elle converge.

Preuve

1°) On a : $u_0 \leq u_1$. Supposons que $u_n \leq u_{n+1}$, alors : $f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \Rightarrow u_{n+1} \leq u_{n+2}$. Donc (u_n) est croissante.

2°) Idem par récurrence. (u_n) est monotone bornée, donc est convergente.

Remarque

1°) En résumé, on a montré : f croissante sur $I \Rightarrow (u_n)$ monotone

2°) Si on a : $\forall x \in I$, $f(x) > x$, alors (u_n) est croissante car en posant $x = u_{n-1}$, on a en effet :

$$f(x) > x \Rightarrow u_n \ > u_{n-1}.$$

Il y a là soit convergence dans $\mathbb{R}$, soit divergence vers $+\infty$.

Dans le cas où $f(x) - x < 0$ sur $]a, b[$, on montre de même que la suite est décroissante. Ainsi, le sens de variation de la suite n'est pas lié à celui de f, mais seulement à la position de $f(x)$ par rapport à x.

Exemple

☐ Soit $u_0 = a > 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}(u_n + \dfrac{2}{u_n})$. La suite (u_n) est bien définie car $f(x) > 0$ pour $x > 0$ et $I = \mathbb{R}_+^*$ est stable par f.

☐ Soit (u_n) la suite définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = u_n + \arctan u_n$. Prenons $I = \mathbb{R}_+^*$ et $f(x) = x + \arctan x$. Il est clair que : $f(I) \subset I$. La suite (u_n) est strictement croissante. Si elle convergeait vers $\ell \in \mathbb{R}$, on aurait

$$\ell = \ell + \arctan \ell \Rightarrow \ell = 0.$$

Cela est absurde car $u_n > u_0 > 0$. Donc (u_n) diverge vers $+\infty$.

☐ Soit $f(x) = \sqrt{1+x}$. On cherche les points fixes :

$$\sqrt{1+x} = x \Leftrightarrow 1 + x = x^2 \text{ avec } x \geq 0 \Leftrightarrow x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Posons $\omega = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Le domaine de définition de f est $[-1, +\infty[$. On le partage en deux intervalles $[-1, \omega]$ et $[\omega, +\infty[$ qui sont stable par f. On étudie plusieurs cas :

– Si $u_0 \leq \omega$, alors $f(u_0) - u_0 \geq 0$. Donc $u_1 \geq u_0$ et par récurrence (u_n) est croissante et majorée par ω. Donc elle converge vers ω qui est un point fixe.

– Si $u_0 \geq \omega$, alors (u_n) est décroissante.

☐ Soit $f(x) = \dfrac{4-3x}{10}$. f admet $\dfrac{1}{2}$ pour point fixe. La suite (u_n) n'est définie que pour $u_0 \in [-\frac{124}{27}, \frac{4}{3}]$.

En multipliant par la quantité conjuguée, on a :

$$\left|u_{n+1} - \frac{1}{2}\right| = \frac{3\left|\frac{1}{2} - u_n\right|}{10\sqrt{\frac{4-3x}{10}} + 5}$$

Donc la suite converge vers $\dfrac{1}{2}$.

Théorème

Supposons f décroissante. On considère : $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$.

La suite (u_n) converge si et seulement si (v_n) et (w_n) sont adjacentes.

Preuve

Si f est décroissante, on peut remarquer que $h = f \circ f$ stabilise I et est croissante. On peut distinguer le cas de la sous-suite de rang pair (u_{2n}) et de rang impair (u_{2n+1}) car :

$$u_{2n+2} = f \circ f(u_{2n}) = h(u_{2n}) \text{ et } u_{2n+3} = f \circ f(u_{2n+1}) = h(u_{2n+1}).$$

L'application h étant croissante, on se ramène à l'étude précédente. On obtient alors deux suites (v_n) et (w_n) définie par :

$$v_n = h(v_{n-1}) \text{ et } w_n = h(w_{n-1}).$$

Si $u_0 \leq u_2$, $v_0 \leq v_1$ et la suite (v_n) est croissante. On a alors : $w_0 = u_1 \geq u_3$.

Par suite (w_n) est décroissante. La suite (u_n) converge donc si et seulement si les suites (v_n) et (w_n) sont adjacentes. Si c'est le cas, on a trouvé deux suites adjacentes qui permettent l'approximation du réel x vérifiant $f(x) = x$.

Exemple

☐ Soit $u_0 = a \in \mathbb{R}_+$ et $u_{n+1} = 3 - \sqrt{\dfrac{u_n}{2}}$. L'application f est définie par : $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ avec $f(x) = 3 - \sqrt{\frac{x}{2}}$.

1°) L'application f est décroissante. On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ et $f(18) = 0$. On partage le domaine de définition de f en deux intervalles $[0, 18]$ et $[18, +\infty[$. Cherchons pour quelles valeurs de a la suite (u_n) est définie :

- si $a > 18$, alors $u_1 < 0$ et dans ce cas aucune suite n'est définie ;

- si $0 \le a \le 18$, $[0, 18]$ est stable par f, dans ce cas, il existe une et une seule suite (u_n) vérifiant la relation de récurrence ?

2°) On étudie maintenant les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}). On a deux cas à étudier :

- si $u_0 \le u_2$, on montre par récurrence que la suite (u_{2n}) est croissanteet (u_{2n+1}) décroissante ;

- si $u_0 \ge u_2$, on montre par récurrence que la suite (u_{2n}) est décroissante et (u_n) croissante.

Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, 18]$, la suite (u_n) est bornée. Elles sont monotones et bornées, elles convergent. Soit λ_1 la limite de (u_{2n}) et λ_2 la limite de (u_{2n+1}). Ces deux réels sont les points fixes de l'application $f \circ f$. On cherche d'abord les points fixes de f car si x est point de f, x est aussi point fixe de $f \circ f$. On a :

$$f(x) = x \Leftrightarrow x = 2.$$

Ensuite un calcul pénible nous donne aussi : $(f \circ f)(x) = x \Leftrightarrow x = 2$.

3°) On en déduit que $\lambda_1 = \lambda_2$. Comme les suies (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite, la suite (u_n) converge aussi vers cette limite.

☐ Soit $f(x) = \frac{3}{2x^2+1}$. f admet 1 pour point fixe. On étudie les suites de rang pair, et de rang impair. On pose $g = f \circ f$. Le signe de $g(x) - x$ est celui de :

$$3(2x^2 + 1)^2 - (2x^2 + 1)^2 x - 18x = (x - 1)(2x^2 + 2x + 3)(-2x^2 + 6x - 1)$$

g admet deux points fixes supplémentaires : $\dfrac{3 \pm \sqrt{7}}{2}$. On a alors l'une des deux sous-suites qui tend vers l'un des points fixes, et l'autre qui tend vers l'autre, sauf dans le cas particulier où $u_0 = 1$, auquel cas la suite est constante.

Remarque

1°) Le cas le plus simple est lorsque f est croissante telle que $f(a) = a$ et $f(b) = b$.

2°) Dans le cas où f est décroissante, les calculs peuvent se révéler particulièrement pénible.

3°) Nous venons d'étudier deux cas : f croissante et f décroissante. Si f est quelconque, l'étude peut se révéler extrêmement difficile. Donnons les méthodes de contraction :

Théorème (du point fixe)

1°) Si $I = [a, b]$ est un intervalle stable par une application continue f, alors f admet un point fixe sur I.

2°) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une λ-contraction. Alors :

i-f admet un point fixe unique ω dans I.

ii- toute suite (u_n) définie par $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ tend vers ω géométriquement.

Preuve

$1^{\ddot{\circ}}$) I étant stable par f, on a : $f(I) \subset I$, c'est-à-dire :

$$\forall x \in [a,b],\ f(x) \in [a,b] \Rightarrow a \leq f(x) \leq f(b).$$

Posons $g(x) = f(x) - x$. L'application g est continue et on a : $g(a)g(b) \leq 0$. On conclut avec le théorème des valeurs intermédiaires qu'on verra par la suite dans le chapitre sur la continuité.

2°) Montrons que la suite (u_n) converge. Pour cela, on vérifie que (u_n) est une suite de Cauchy. Soit $N \in \mathbb{N}$ et $p \geq q \geq N$. Calculons :

$$\begin{array}{rcl} |u_p - u_q| & = & |(u_p - u_{p-1}) + (u_{p-1} - u_{p-2}) + ... + (u_{q+1} - u_q)| \\ & \leq & \displaystyle\sum_{k=q}^{p-1} |u_{k+1} - u_k|. \end{array}$$

Mais f est une *lambda* contraction, donc on a :

$$|u_{k+1} - u_k| = |f(u_k) - f(u_{k-1})| \leq \lambda |u_{k+1} - u_k|.$$

Par récurrence, on arrive à :

$$\begin{array}{rrcl} & |u_{k+1} - u_k| & \leq & \lambda^k |u_1 - u_0| \\ \Rightarrow & |u_p - u_q| & \leq & |u_1 - u_0| \displaystyle\sum_{k=q}^{p+1} \lambda^k \\ & & \leq & |u_1 - u_0| \lambda^q \displaystyle\sum_{k=q}^{p} \lambda^{k-q} = |u_1 - u_0| \lambda^q \sum_{k=0}^{p+q-1} \lambda^k = |u_1 - u_0| \lambda^q \frac{1 - \lambda^{p-q}}{1 - \lambda} \leq |u_1 - u_0| \frac{\lambda^q}{1 - \lambda}. \end{array}$$

Comme $\lim\limits_{q \to +\infty} \lambda^q = 0$, la suite (u_n) est de Cauchy. Elle est donc convergente vers une limite ω.

Vérifions que ω est bien un point fixe de f. Il suffit de vérifier :

$$0 \leq |f(u_n) - f(\lambda)| \leq \lambda |u_n - \omega| \to 0.$$

Par passage à la limite, on en déduit que : $f(\omega) = \omega$.

Vérifions enfin l'unicité de ω. Supposons l'existe de deux points fixe ω_1 et ω_2. On a :

$$f(\omega_1) = \omega_1 \text{ et } f(\omega_2) = \omega_2.$$

Calculons :

$$|f(\omega_1) - f(\omega_2)| \leq \lambda |\omega_1 - \omega_2| \Rightarrow |\omega_1 - \omega_2| \leq \quad \lambda |\omega_1 - \omega_2|.$$

Cela impliquerait $\lambda \geq 1$, ce qui est contradictoire car f est une contraction. Voilà, on peut respirer.

Théorème (du point attractif et du point répulsif)

Soit $f : I \to I$ une application où I est un ouvert. On suppose que f admet un point fixe ω et que f est dérivable en ω.

1°) Si ω est un point attractif de f, alors il existe un réel $\alpha > 0$ tel que :

i- l'intervalle $J = [\omega - \alpha, \omega + \alpha] \cap I$ est stable par f ;

ii- pour toute u_0 dans J, (u_n) converge vers ω géométriquement.

2°) Si ω est un point répulsif de f sur I et si la suite (u_n) donnée par $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers ω, alors (u_n) est constant et égale à ω à partir d'un certain rang.

Démonstration

I étant un ouvert, il existe $\delta > 0$ tel que : $[\omega-\delta, \omega+\delta] \subset I$. Soit $k = \dfrac{|f'(\omega)+1|}{2}$ et $\varepsilon = |k-1| > 0$. L'application f étant dérivable en ω, on a :

$$\exists \alpha > 0,\ |x-\omega| \leq \alpha \Rightarrow \left|\tfrac{f(x)-\omega}{x-\omega} - f'(\omega)\right| \leq \varepsilon.$$

On a alors :

$$\forall x \in [\omega-\alpha, \omega+\alpha],\ |f(x) - \omega - f'(\omega)(x-\omega)| \leq \varepsilon |x-\omega|.$$

1°) Si $|f'(\omega)| < 1$, alors $k \in]0,1[$ et $\varepsilon = 1-k$. On a donc :

$\forall x \in [\omega-\alpha, \omega+\alpha], |f(x) - \omega - f'(\omega)(x-\omega)| \leq \varepsilon|x-\omega| \Rightarrow |f(x)-\omega| \leq k|x-\omega| \leq |x-\omega| \leq \alpha.$

O en déduit que si $x \in\in [\omega-\alpha, \omega+\alpha]$, $f(x)$ appartient aussi à $\in [\omega$ - α, ω + $\alpha]$. $J = [\omega-\alpha, \omega+\alpha] \cap I$ est donc stable par f.

Si $u_0 \in J$, la suite (u_n) existe et $u_n \in J$. On montre par récurrence que : $|u_n - \omega| \leq k^n |u_0 - \omega|$. De cette inégalité, il est clair que la suite (u_n) converge.

2°) Si $|f'(\omega)| > 1$, alors il est clair que $k \in]1, +\infty[$ et $\varepsilon = k-1$. On a alors :

$$\forall x \in [\omega-\alpha, \omega+\alpha],\ f'(\omega)||x-\omega| - |f(x)-\omega| \leq \varepsilon|x-\omega| \Rightarrow |f(x)-\omega| \geq k|x-\omega|.$$

Si la suite (u_n) converge vers ω, on a :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0 \Rightarrow u_n \in [\omega-\alpha, \omega+\alpha].$$

On vérifie par récurrence que :

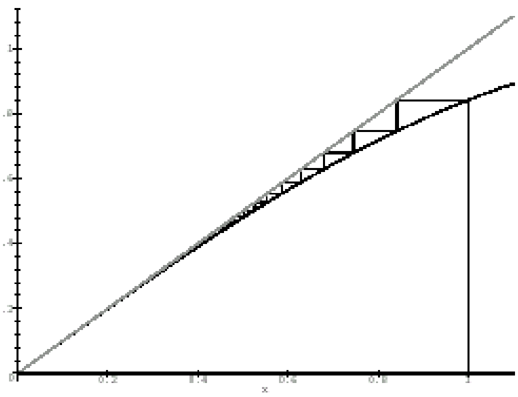
$$\forall n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - \omega| \geq k^{n-n_0} |u_{n_0} - \omega|.$$

Mais on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} k^{n-n_0}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - \omega| = 0$. Donc on ne peut qu'avoir $u_{n_0} = \omega$. Comme $f(\omega) = \omega$, on a :

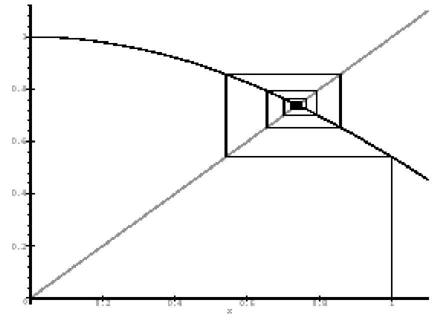
$$\forall n \geq n_0,\ u_n = \omega.$$

Résumé et construction graphique

1°) Si f est croissante, alors (u_n) est monotone :
– si $u_0 \leq u_1$, alors (u_n) est croissante ;
– si $u_1 \leq u_0$, alors (u_n) est décroissante.



2°) Si f est décroissante est décroissante, alors (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones. Si ces deux suite convergent vers la même limite ℓ, alors (u_n) est converge aussi vers ℓ.



3°) Si pour tout x, $f(x) \geq x$, alors f est croissante.

4°) Si pour tout x, $f(x) \leq x$, alors f est décroissante.

C) Les suites classiques

Définition

☐ On dit qu'une suite (u_n) est arithmétique lorsqu'il existe un nombre r tel que : $u_{n+1} = u_n + r$.

☐ On dit qu'une suite (u_n) est géométrique lorsqu'il existe un nombre q tel que : $u_{n+1} = qu_n$.

☐ La suite (u_n) définie par : $\forall n$, $u_{n+1} = a.u_n + b$ avec $b \neq 0$ et $a \neq 1$ est une suite arithmético-géométrique.

☐ Un cas particulier de suite récurrente est

$$u_{n+1} = \frac{au_n + b}{cu_n + d} = f(u_n) \text{ où } ad - bc \neq 0$$

avec $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$. Ce sont les suites homographiques.

Remarque

1°) Dans l'expression d'une suite arithmético-géométrique, si $b = 0$ c'est une suite géométrique. Si $a = 1$, c'est une suite arithmétique.

2°) Dans l'expression d'une suite homographique, si $c = 0$, alors c'est une suite arithmético-géométrique.

3°) Toujours pour une suite homographique, si $ad - bc = 0$, c'est une suite constante.

Propriété

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0.

1°) On a : $u_n = u_0 + nr$.

2°) $u_0 + u_1 + ... + u_n = (n+1)u_0 + r\frac{n(n+1)}{2} = \dfrac{(n+1)(u_0 + u_n)}{2}$.

Propriété

Soit (u_n) une suite géométrique si et seulement si trois termes consécutifs de (u_n) vérifie : $u_n^2 = u_{n-1}.u_{n+1}$.

Propriété

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0.
1°) Alors on a : $\forall k \in \mathbb{N}$, $u_k = q^k u_0$.
2°) Si $a \neq 1$, alors : $1 + a + \ldots + a^n = \dfrac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$.
Si $a = 1$, alors : $1 + a + \ldots + a^n = n + 1$.
3°) Si $q \neq 1$, alors :$u_0 + u_1 + \ldots + u_n = u_0 \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$. Cette somme converge si et seulement si $q < 1$. La limite de la somme vaut alors $\frac{u_0}{1-q}$.
Si $q = 1$, alors : $u_0 + u_1 + \ldots + u_n = u_0(n + 1)$.

Preuve

1°) Cela se prouve par récurrence. Soit $P(n)$ la propriété : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 q^n$.

Pour $n = 0$, on a : $u_0 q^0 = u_0$. Donc $P(0)$ est vraie. Supposons $P(n)$ et calculons :

$$u_{n+1} = q u_n = q.q^n u_0 = q^{n+1} u_0.$$

On obtient $P(n + 1)$, donc $P(n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

2°) Posons : $S_n = 1 + a + \ldots + a^n$.

Si $a \neq 1$, alors on a :

$$\begin{array}{rrcl} & aS_n & = & a + a^2 + ... + a^{n+1} \\ \Rightarrow & aS_n & = & (1 + a + a^2 + ... + a^n) + a^{n+1} - 1 \\ \Rightarrow & aS_n & = & S_n + a^{n+1} - 1 \\ \Rightarrow & S_n & = & \frac{1-a^{n+1}}{1-a}. \end{array}$$

Si $a = 1$, il n'y a rien à démontrer.

3°) Posons cette fois ci : $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$.

Si $q = 1$, alors : $S_n = u_0 + u_0 + u_0 + ... + u_0 = (n + 1)u_0$.

Si $q \neq 1$, alors : $\mathrm{S}_n = u_0 + u_0 q + \ldots + u_0 q^n = u_0(1 + q + \ldots + q^n) = u_0 \ \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Exemple

□ On utilise souvent des suites géométriques de raison complexe pour construire des polygones réguliers.

Propriété

Soit (u_n) une suite arithmético-géométrique : $u_{n+1} = au_n + b$. Posons $\lambda = \dfrac{b}{1 - a}$.
Si $a \neq 1$, alors la suite (v_n) définie : $v_n = u_n - \lambda$, est géométrique et on a : $u_n = \lambda + a^n(u_0 - \lambda)$.

Preuve

Soit $f(x) = ax + b$. Cette application est définie sur $\mathbb{R}$ et on a $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$. Cherchons ses points fixes :

$$f(\lambda) = \lambda \Leftrightarrow \lambda = \frac{b}{1 - a}.$$

On a :

$$u_{n+1} = au_n + b \text{ et } \lambda = a\lambda + b \Rightarrow u_{n+1} - \lambda = a(u_n - \lambda).$$

Si $v_n = u_n - \lambda$, alors (v_n) est une suite géométrique de raison a et on a : $v_n = a^n v_0$. D'où : $u_n - \lambda = a^n(u_0 - \lambda)$ et donc : $u_n = \lambda + a^n(u_0 - \lambda)$.

Propriété

Soit (u_n) une suite définie par $u_{n+1} = \dfrac{au_n + b}{cu_n + d}$ et considérons l'application $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$.

1°) Si f admet deux points fixes λ_1 et λ_2, alors la suite (v_n) définie par $v_n = \dfrac{u_n - \ell_1}{u_n - \ell_2}$ est géométrique.

2°) Si f admet un seul point fixe double λ, alors la suite (v_n) définie par $v_n = \frac{1}{u_n - \ell}$ est arithmétique.

Preuve

λ est un point fixe de f si et seulement λ vérifie :

$$c\lambda^2 + (d - a)\lambda - b = 0.$$

On a deux cas à étudier selon que son discriminant Δ est nul ou pas :

1°) Supposons $\Delta \neq 0$. Alors dans ce cas, on a deux points fixes. Posons $v_n = \frac{u_n - \ell_1}{u_n - \ell_2}$ et calculons :

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - \ell_1}{u_{n+1} - \ell_2} = \frac{\frac{au_n+b}{cu_n+d} - \ell_1}{\frac{au_n+b}{cu_n+d} - \ell_2} = \frac{(a - \ell_1 c)\, u_n + b - \ell_1 d}{(a - \ell_2 c)\, u_n + (b - \ell_2 d)}.$$

Mais :

$$c\lambda_i^2 + (d - a)\lambda_i - b = 0 \Rightarrow -(a - \lambda_i c)\lambda_i = b - \lambda_i d.$$

En remplaçant dans l'expression et en factorisant par $(a - \lambda_i c)$, on obtient :

$$v_{n+1} = \tfrac{a-\ell_1 c}{a-\ell_2 c}\tfrac{u_n - \ell_1}{u_n - \ell_2} = \lambda v_n \text{ avec } \lambda = \tfrac{a-\ell_1 c}{a-\ell_2 c}.$$

En posant $A = \lambda^n \frac{u_0 - \ell_1}{u_0 - \ell_2}$, il vient :

$$Au_n - A\lambda_2 = u_n - \lambda_1 \Rightarrow u_n = \frac{\ell_1 - A\ell_2}{1 - A} = \frac{\ell_1 - \ell_2\left(\lambda^n \frac{u_0-\ell_1}{u_0-\ell_2}\right)}{1 - \lambda^n \frac{u_0-\ell_1}{u_0-\ell_2}}.$$

Si $\Delta > 0$, alors λ_1 et λ_2 sont réels. On a quatre cas à étudier :

- si $|\lambda| < 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lambda_1$;
- si $|\lambda| > 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lambda_2$;
- le cas où $\lambda = 1$ est impossible ;
- si $\lambda = -1$, alors la suite oscille entre deux valeurs.

Si $\Delta < 0$, alors λ_1 et λ_2 sont complexes et on a : $\lambda_2 = \overline{\ell_1}$. Dans ce cas, $|\lambda| = 1$ et donc il existe θ tel que : $\lambda = e^{i\theta}$.

2°) Supposons $\Delta = 0$. Alors dans ce cas, on a un point fixe double λ. Posons

$$v_n = \frac{1}{u_n - \ell}.$$

Calculons :

$$
\begin{array}{rcl}
v_{n+1} - v_n & = & \frac{1}{u_{n+1}-\ell} - \frac{1}{u_n-\ell} \\
& = & \frac{1}{\frac{au_n+b}{cu_n+d} - \frac{a\ell+b}{c\ell+d}} - \frac{1}{u_n-\ell} \\
& = & \frac{(c\ell+d)(cu_n+d)}{(ad-\ell c)(u_n-\ell)} - \frac{1}{u_n-\ell} \\
& = & \frac{1}{u_n-\ell} \left[\frac{(c\ell+d)(cu_n+d)}{ad-bc} - 1 \right]. \\
& = & \frac{1}{u_n-\ell} \frac{c(c\ell+d)u_n+(c\ell+d)d-ad+bc}{ad-bc}
\end{array}
$$

Mais :

$$
\begin{array}{rl}
& (d-a)^2 + 4bc = \Delta = 0 \\
\Leftrightarrow & -d^2 - a^2 + 2cd - 4bc = 0 \\
\Leftrightarrow & d^2 - a^2 - 4bc - 2d^2 + 2ad = 0 \\
\Leftrightarrow & \frac{a-d}{2}(-d-a) - 2bc - d^2 + ad = 0 \\
\Leftrightarrow & \lambda[-cd - ac] - 2bc - d^2 + ad = 0 \\
\Leftrightarrow & c[(d-a)\lambda - b] - 2\lambda cd - d^2 + ad - bc = 0 \\
\Leftrightarrow & -c^{2\lambda 2} - 2\lambda cd - d^2 + ad - bc = 0 \\
\Leftrightarrow & -\lambda c(c\lambda + d) = (c\lambda + d)d - ad + bc.
\end{array}
$$

C'est assez pénible ce calcul ! En factorisant par $\lambda c(c\lambda + d)$, on trouve :

$$
v_{n+1} - v_n = \frac{c\,(c\ell + d)}{ad - bc} \frac{u_n - \ell}{u_n - \ell} = \frac{c\,(c\ell + d)}{ad - bc}.
$$

Donc la suite (v_n) est une suite arithmétique et on en déduit que $v_n = nk + v_0$ avec $v_0 = \dfrac{1}{u_0 - \ell}$.
D'où

$$
u_n = \lambda + \frac{1}{kn + v_0} \to \lambda.
$$

D) Suites récurrentes linéaires

Définition

☐ Une telle suite est de la forme : $\forall n,\ u_{n+2} = a.u_{n+1} + b.u_n$ avec $b \neq 0$.

☐ L'équation $r^2 = ar + b$ s'appelle l'équation caractéristique de la suite (u_n).

La propriété suivante donne une méthode pour obtenir une expression générale des suites vérifiant cette relation de récurrence linéaire :

Propriété

Soit a et b deux complexes tels que : $u_{n+2} \ = a.u_{n+1} \ + b.u_n$.

1°) L'ensemble des suites solutions de cette récurrence forme un espace vectoriel de dimension 2.

2°) Si l'équation caractéristique $r^2 = ar + b = 0$ admet deux racines distinctes r_1 et r_2, alors il existe deux constantes complexes tels que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$.

3°) Si l'équation caractéristique $r^2 = ar + b = 0$ admet une racine double r_n, alors il existe deux constantes complexes tels que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (\lambda n + \mu) r^n$.

Preuve

1°) Soit : $V = \{(u_n) | u_{n+2} \ = a.u_{n+1} \ + b.u_n\}$. Considérons les deux suites particulières (u_n) et (u'_n) éléments de V, définies par $u_0 = 1$ et $u_1 = 0$, $u'_0 = 0$ et $u'_1 = 1$. Par récurrence, on montre l'existence de deux constantes λ et μ tels que :

$$\forall (v_n) \in V,\ u_n = \lambda . u_n + \mu . u'_n.$$

Ceci prouve que V est un sous-espace vectoriel de dimension deux de l'ensemble des suitesde $\mathbb{C}$.

2°) On cherche les solutions particulières sous forme géométriques r^n qui vérifient : $r^{n+2} = ar^{n+1} + br^n$. Cela revient à résoudre : $r^2 = ar + b$. Si r est solution, les autres solutions sont de type : $u_n = v_n r^n$. On obtient :

$$\begin{array}{lll} & v_{n+2}r^2 & = & arv_{n+1} + bv_n \\ \Leftrightarrow & v_{n+2}(ar+b) & = & arv_{n+1} + bv_n \\ \Leftrightarrow & (ar+b)(v_{n+2} - v_{n+1}) & = & -b(v_{n+1} - v_n). \end{array}$$

Donc la suite $v_{n+2} - v_{n+1}$ est une suite géométrique de raison $-\frac{b}{ar+b}$ ou $-\frac{b}{r^2}$ ou enfin $\frac{r'}{r}$ si r' est l'autreracine.Ecrivons : $v_n - v_{n-1} = A\left(\frac{r'}{r}\right)^n$ où C est une constante. On en déduit que

$$v_n = A\left(\frac{r'}{r}\right)^n + A\left(\frac{r'}{r}\right)^{n-1} + ... + A\frac{r'}{r} + v_0$$

Si $r = r'$, alors v_n est de la forme $\alpha n + \beta$, et u_n est combinaison des suites r^n et nr^n.

Si $r \neq r'$, alors v_n est de la forme $\alpha\left(\frac{r'}{r}\right)^n + \beta$, et u_n est combinaison de r^n et de r'^n.

Remarque

1°) En exercice, on essayera de voir un exemple de suite définie par : $u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = c$ où c est une constante.

2°) On peut généraliser cette notion de suite récurrente linéaire :

$$u_{n+p} = a_1 u_{n+p-1} + \ldots + a_p u_n \text{ avec } (a_1, a_2, \ldots, a_p) \in \mathbb{C}.$$

En posant $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ \vdots \\ u_{n+p-1} \end{pmatrix}$, on revient à :

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ a_p & & & a_1 \end{pmatrix} X_n = AX_n.$$

Ici on calcule le polynôme caractéristique de A. Soit r_1, ..., r_s de P dans $\mathbb{C}$ avec α_1, ..., α_s leurs multiplicités respectives. Alors les suite r_1^n, ..., $n^{\alpha_1 - 1}r_1^n$, ..., r_s^n, ..., $n^{\alpha_1 - 1}r_s^n$ forment une base de l'ensemble des solutions de : $u_{n+p} = a_1 u_{n+p-1} + \ldots + a_p u_n$.

Exemple

□ Soit (u_n) une suite de complexes vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} - 4u_{n+1} + 4u_n = n.$$

Calculons u_n en fonction de n. Soit (r_n) une solution particulière. Alors en posant $v_n = u_n - r_n$, on constate que la suite (v_n) vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+2} - 4v_{n+1} + 4v_n = 0.$$

On cherche une solution particulière (r_n) de la forme : $r_n = \alpha n + \beta$ où α et β sont des constantes à déterminer. Calculons :

$$r_{n+2} - 4r_{n+1} + 4r_n = \alpha n + 2\alpha + \beta - 4\alpha n - 4\alpha - 4\beta + 4\alpha n + 4\beta = n.$$

Par identification, on trouve : $\alpha = 1$ et $\beta = 2$. Donc la suite (r_n) est définie par : $r_n = n + 2$.

On va exprimer v_n en fonction de n en utilisant le théorème :

$$r^2 - 4r + 4 = (r-2)^2 = 0 \Leftrightarrow r = 2.$$

Il existe deux constantes λ et μ tels que :

$$\forall n,\ v_n = (\lambda n + \mu)2^n.$$

On peut trouver les valeurs de λ et μ en remplaçons $n = 0$ et $n = 1$. On trouve finalement :

$$\forall n,\ u_n = (\lambda n + \mu)2^n + n + 2.$$

□ La suite de Fibonacci $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ est une suite récurrente linéaire.