Table des matières

Chapitre 1

ESPACES VECTORIELS

1.1 Définitions et exemples

1.1.1 Définition

Dans toutes les mathématiques on rencontre des objets sur lesquels on peut définir deux opérations naturelles dont l'une a exactement les propriétés de l'addition usuelle dans $\mathbb{R}$ et l'autre n'est rien d'autre qu'une multiplication par un nombre. C'est le cas des vecteurs de la géométrie plane ou de l'espace, et de bien d'autres exemples comme les ensembles de fonctions ou de suites. Cette structure porte le nom de structure d'espace vectoriel et c'est ce qui est étudié dans ce chapitre.

Définition 1.1.1 *Soit $\mathbb{K}$ un ensemble muni de deux opérations $+$ et $\times$ appelée respectivement addition et multiplication. On dit que $(\mathbb{K},+,\times)$ est un* **corps** *si :*

1. $(\mathbb{K},+)$ *est un* **groupe**, *c'est-à-dire :*
   i) $+$ *est* **associative** *:* $\forall(x,y,z)\in\mathbb{K}^3$, $(x+y)+z=x+(y+z)$.
   ii) il existe un **élément neutre** 0 *:* $\forall x\in\mathbb{K}$, $x+0=0+x=x$.
   iii) $\forall x\in\mathbb{K}$ *il existe un* **opposé** $y\in\mathbb{K}$ *tel que* $x+y=y+x=0$.
2. $(\mathbb{K},+)$ *est groupe* **commutatif** *:* $\forall(x,y)\in\mathbb{K}^2$, $x+y=y+x$.
3. $(\mathbb{K},+,\times)$ *est un* **anneau**, *c'est-à-dire :*
   i) $\times$ *est* **distributive** *par rapport à l'addition :* $\forall(x,y,z)\in\mathbb{K}^3$, $x\times(y+z)=x\times y+x\times z$ *et* $(y+z)\times x=y\times x+z\times x$.
   ii) $\times$ *est associative :* $\forall(x,y,z)\in\mathbb{K}^3$, $(x\times y)\times z=x\times(y\times z)$.
   iii) il existe un élément neutre 1 *:* $\forall x\in\mathbb{K}$, $1\times x=x\times 1=x$.
4. $\forall x\in\mathbb{K}-\{0\}$, *il existe un* **inverse** $y\in\mathbb{K}$ *tel que :* $x\times y=y\times x=1$.

Si de plus $\times$ *est commutative, c'est-à-dire si :* $\forall(x,y)\in\mathbb{K}^2$, $x\times y=y\times x$, *on dit que* $\mathbb{K}$ *est commutatif.*

Remarque 1.1.1 *L'élément neutre pour* $+$ *et* $\times$ *est unique. De même pour tout* $x\in\mathbb{K}$ *l'opposé est unique et est noté* $-x$ *et pour tout* $x\in\mathbb{K}-\{0\}$, *l'inverse est unique et est noté* x^{-1} *ou* $\frac{1}{x}$ *dans le cas où* $\mathbb{K}$ *est commutatif.*

Remarque 1.1.2 $(\mathbb{R},+,\times)$ *et* $(\mathbb{C},+,\times)$ *sont des corps commutatifs.*

Définition 1.1.2 *On appelle* $\mathbb{K}$**-espace vectoriel** *ou* **espace vectoriel** *sur un* **corps** $\mathbb{K}$ *commutatif (ce qui est le cas lorsque* $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$*) tout ensemble* E, $E\neq\emptyset$ *muni de deux opérations :*

1. *Une opération interne appelée addition :*

$$\begin{array}{ccc} E\times E & \to & E \\ (x,y) & \mapsto & x+y \end{array}$$

   vérifiant les propriétés suivantes :
   - *elle est commutative :* $\forall(x,y)\in E^2$, $x+y=y+x$.
   - *elle est associative :* $\forall(x,y,z)\in E^3$, $x+(y+z)=(x+y)+z$.
   - *elle admet un élément neutre noté* 0_E, *c'est-à-dire que* $\forall x\in E$, $x+0_E=0_E+x=x$.
   - *pour tout* $x\in E$ *il existe un opposé, c'est-à-dire qu'il existe* $y\in E$ *tel que* $x+y=y+x=0_E$.
2. *Une opération externe appelée multiplication :*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}\times E & \to & E \\ (\lambda,x) & \mapsto & \lambda x \end{array}$$

   vérifiant les propriétés suivantes :
   - *elle est distributive par rapport à l'addition dans* $\mathbb{K}$ *:* $\forall x\in E$, $\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2$, $(\lambda+\mu)x=\lambda x+\mu x$.
   - *elle est distributive par rapport à l'addition dans* E *:* $\forall\lambda\in\mathbb{K}$, $\forall(x,y)\in E^2$, $\lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y$.
   - *elle est associative :* $\forall x\in E$, $\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2$, $\lambda(\mu x)=(\lambda\mu)x$.
   - 1 *est élément neutre :* $\forall x\in E$, $1x=x$.

Les éléments de E *s'appellent les* **vecteurs** *et les éléments de* $\mathbb{K}$ *s'appellent les* **scalaires**.

Remarque 1.1.3 — *L'élément neutre est unique !*

— *Pour tout vecteur x, l'opposé est unique et est noté $-x$.*

Avant de donner des exemples énonçons d'abord deux propriétés bien connues dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$.

Proposition 1.1.1 — *Pour tout $x \in E$, on a $0x = 0_E$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda 0_E = 0_E$.*
— *Pour tous $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $\lambda x = 0_E$ si et seulement si $\lambda = 0$ ou $x = 0_E$.*
— *Pour tout $x \in E$, $-x = (-1)x$.*
— *Pour tous λ, μ de $\mathbb{K}$ et tous x, y de E on a $(\lambda - \mu)x = \lambda x - \mu x$ et $\lambda(x - y) = \lambda x - \lambda y$.*

0_E désigne l'élément neutre de E, mais dans la suite il sera noté plus simplement 0 sans confusion possible.

1.1.2 Exemples

Les espaces vectoriels $\mathbb{K}^n$

$\mathbb{K}$ est évidemment un espace vectoriel sur lui-même.

Plus généralement, les espaces vectoriels les plus élémentaires sont les espaces $\mathbb{K}^n$ (Dans la plupart des exemples qui seront traités, ce sera $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$). Sur $\mathbb{K}^n$ on définit une addition comme suit. Soient $x = (x_1, ..., x_n)$ et $y = (y_1, ..., y_n)$ deux éléments de $\mathbb{K}^n$. Alors $x + y$ est défini par :

$$x + y = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n)$$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, alors λx est défini par :

$$\lambda x = (\lambda x_1, ..., \lambda x_n)$$

Proposition 1.1.2 *$\mathbb{K}^n$ muni de ces deux opérations est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.*

La preuve est laissée au lecteur. Il suffit de vérifier toutes les propriétés données dans la définition.

Les espaces de fonctions

Soit A un ensemble non vide et soit $\mathcal{F}(A, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions de A dans $\mathbb{K}$. Alors on peut définir sur $\mathcal{F}(A, \mathbb{K})$ une addition de la façon suivante. Soient $f, g \in \mathcal{F}(A, \mathbb{K})$. Alors $f + g$ est définie par :

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

De même pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on définit la multiplication de λ par f :

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x).$$

Muni de ces deux opérations, $\mathcal{F}(A, \mathbb{K})$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. L'élément neutre est la fonction nulle 0 définie par $0(x) = 0$ pour tout $x \in A$.

Les espaces de suites

Comme cas particulier on a l'espace des suites $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{C})$). Rappelons en effet qu'une suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ n'est rien d'autre qu'une fonction de l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers dans $\mathbb{R}$ (resp. $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{C})$). L'espace des suites est donc un espace vectoriel pour les opérations usuelles :

$$(u_n)_{n \geqslant 0} + (v_n)_{n \geqslant 0} = (u_n + v_n)_{n \geqslant 0}$$

et

$$\lambda (u_n)_{n \geqslant 0} = (\lambda u_n)_{n \geqslant 0}$$

L'élément neutre est la suite nulle qui à tout n associe 0.

L'espace vectoriel des polynômes

On rappelle que l'espace des polynômes sur $\mathbb{K}$ noté $\mathbb{K}[X]$ est l'ensemble des fonctions P de $\mathbb{K}$ dans lui-même qui peuvent s'écrire sous la forme :

$$P(X) = a_n X^n + ... + a_1 X + a_0$$

où n est un entier naturel et $a_0, a_1, ..., a_n$ des éléments de $\mathbb{K}$.

Alors $\mathbb{K}[X]$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ pour l'addition des fonctions et la multiplication par un scalaire. L'élément neutre est le polynôme nul O défini par $O(X) = 0$.

1.1.3 Espaces vectoriels produits

Dans cette partie, on va voir qu'à partir de deux espaces vectoriels, on peut en fabriquer un troisième.

Proposition 1.1.3 *Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. On munit l'ensemble $E \times F = \{(x, y)/x \in E \text{ et } y \in F\}$ d'une addition et d'une multiplication de la façon suivante. Pour tout $(x, y), (x', y') \in E \times F$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a :*

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$$

et

$$\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$$

Alors, muni de ces deux opérations, $E \times F$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ appelé **espace vectoriel produit** *de E par F.*

La preuve est laissée au lecteur.

1.1.4 Sous-espaces vectoriels

On va maintenant s'intéresser à certains sous-ensembles d'un espace vectoriel qui vont avoir à leur tour une structure d'espace vectoriel.

Définition 1.1.3 *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et F une partie de E. Alors on dit que F est un* **sous-espace vectoriel** *de E si :*

1. *$F \neq \emptyset$.*
2. *Pour tout $x, y \in F$ et tout $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, alors $\lambda x + \mu y \in F$. On dit alors que F est stable.*

Remarque 1.1.4 *Tout sous-espace vectoriel contient toujours le vecteur nul. En effet si F est un sous-espace vectoriel de E, alors $F \neq \emptyset$. Donc soit $x \in F$, alors $0 = 1x - 1x \in F$.*

Dans la pratique, on montrera assez souvent que $0 \in F$.

De cette définition, il résulte que F a une structure d'espace vectoriel, ce qui justifie la terminologie "sous-espace vectoriel". En effet, on a la proposition suivante :

Proposition 1.1.4 *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et F un sous-espace vectoriel de E. Alors F avec les opérations induites $(x, y) \mapsto x + y$ et $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ est un espace vectoriel.*

La preuve est laissée au lecteur.

Remarque 1.1.5 *$\{0\}$ et E sont des sous-espaces vectoriels de E.*

Proposition 1.1.5 *Soit E un espace vectoriel. Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E, alors $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.*

Preuve: Puisque F et G sont des sous-espaces vectoriels, le vecteur nul de E appartient à F et G et donc à $F \cap G$.

Soit maintenant $x, y \in F \cap G$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Alors x et y appartiennent tous les deux à F et à G. Comme F et G sont des sous-espaces vectoriels, on a $\lambda x + \mu y \in F$ et $\lambda x + \mu y \in G$, donc $\lambda x + \mu y \in F \cap G$.

□

Plus généralement on a la proposition suivante pour une intersection quelconque de sous-espaces vectoriels.

Proposition 1.1.6 *Soit E un espace vectoriel et $(F_i)_{i \in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E. Alors $\bigcap_{i \in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E.*

1.1.5 Exemple de sous-espaces vectoriels

Les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$

Soit $\mathcal{S}$ un système homogène de p équations à n inconnues :

$$(\mathcal{S}) \Longleftrightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n = 0 \\ .... \\ a_{p1}x_1 + ... + a_{pn}x_n = 0 \end{cases}$$

Alors, on a la proposition suivante :

Proposition 1.1.7 *Soit F l'ensemble des n-uplets $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{K}^n$ solutions du système homogène $\mathcal{S}$ ci-dessus. Alors F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.*

La preuve est laissée au lecteur.

Les sous-espaces vectoriels usuels de fonctions

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Alors l'espace $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ des fonctions continues sur I à valeur dans $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. De même l'espace $\mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ des fonctions dérivables sur I à valeur dans $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. De plus comme toute fonction dérivable est continue, il s'ensuit que $\mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ est aussi un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$.

L'espace vectoriel $\mathbb{K}_n[X]$

L'espace $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes de degré au plus n (c'est-à-dire l'espace des polynômes qui s'ecrivent $P(X) = a_nX^n + ... + a_1X + a_0$ avec n fixé) est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.

1.2 Bases et dimension d'un espace vectoriel

Dans toute cette section, E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1.2.1 Famille génératrice

Définition 1.2.1 *Soient $x_1, x_2, ..., x_n$ des vecteurs de E. On appelle* **combinaison linéaire** *des vecteurs $x_1, x_2, ..., x_n$, tout élément de la forme $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_n x_n$, où $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$.*

Évidemment, les vecteurs $x_1, x_2, ..., x_n$ sont eux-mêmes des combinaisons linéaires de $x_1, x_2, ..., x_n$.

Définition 1.2.2 *On appelle* **famille finie de vecteurs** *d'un espace vectoriel E, la donnée d'un entier $n \geqslant 1$ et d'une suite de n vecteurs $x_1, ..., x_n$ de E notée $(x_1, x_2, ..., x_n)$.*

Définition 1.2.3 *Soient $u_1, u_2, ..., u_n$ des vecteurs de E. On dit que $(u_1, ..., u_n)$ est* **une famille génératrice** *de E ou que $(u_1, ..., u_n)$* **engendre** *E si tout vecteur x de E s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs $u_1, ..., u_n$.*

Si un espace vectoriel E est engendré par une famille finie de vecteurs $(u_1, ..., u_n)$, on note alors $E = \langle u_1, ..., u_n \rangle$.

Proposition 1.2.1 *Soit $(u_1, ..., u_n)$ une famille de vecteurs. Soit F l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de u_1,...,u_n. Alors F est un sous-espace vectoriel de E et $(u_1, ..., u_n)$ est une famille génératrice de F.*

Exemple: Notons $e_1, e_2, ..., e_n$ les vecteurs de $\mathbb{K}^n$ définis par :

$$e_1 = (1, 0, ..., 0), \quad e_2 = (0, 1, ..., 0) \quad, ..., \quad e_n = (0, ..., 0, 1)$$

Tout vecteur $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{K}^n$ s'écrit :

$$\begin{aligned} x &= x_1(1, 0, ..., 0) + x_2(0, 1, 0, ..., 0) + ... + x_n(0, ..., 0, 1) \\ &= x_1 e_1 + x_2 e_2 + ... + x_n e_n \end{aligned}$$

donc $(e_1, ..., e_n)$ est une famille génératrice de $\mathbb{K}^n$.

Dans l'espace $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes de degré au plus n, les polynômes 1, X, X^2, ..., X^n forment une famille génératrice de $\mathbb{K}_n[X]$, car tout polynôme s'écrit par définition comme combinaison linéaire de 1, X, X^2, ..., X^n.

1.2.2 Familles libres

Définition 1.2.4 *On dit que la famille de vecteurs* $(u_1, ..., u_n)$ *est* **libre** *ou que* $u_1, ..., u_n$ *sont* **linéairement indépendants** *si la relation* $\lambda_1 u_1 + ... + \lambda_n u_n = 0$ *entraîne* $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$.

Dans le cas contraire, c'est-à-dire si $(u_1, ..., u_n)$ *n'est pas libre, alors on dira que* $(u_1, ..., u_n)$ *est une famille* **liée** *ou que* $u_1, ..., u_n$ *sont* **linéairement dépendants**.

Remarque 1.2.1
- *Toute famille contenant* 0 *est liée.*
- *Si* u *est un vecteur non nul de* E*, alors* (u) *est une famille libre !*
- $(u_1, \cdots, u_n)$ *est une famille libre si et seulement si aucun des vecteurs de cette famille ne peut s'écrire comme combinaison linéaire des autres.*
- *Comme conséquence,* (u_1, u_2) *est libre si et seulement si* u_1 *et* u_2 *ne sont pas colinéaires. (On rappelle que* (u_1, u_2) *sont colinéaires s'il existe* λ *tel que* $u_1 = \lambda u_2$ *ou* $u_2 = \lambda u_1$*).*

Exemple: Revenons au cas de $\mathbb{K}^n$ et à la famille de vecteurs $(e_1, ..., e_n)$ définie dans l'exemple précédent. Soient $\lambda_1, ..., \lambda_n$ des scalaires tels que :

$$\lambda_1 e_1 + ... + \lambda_n e_n = 0.$$

On rappelle que l'élément neutre de $\mathbb{K}^n$ est $0 = (0, ..., 0)$ et que d'après l'exemple précédent, on a :

$$\lambda_1 e_1 + ... + \lambda_n e_n = (\lambda_1, ..., \lambda_n).$$

Donc si $\lambda_1 e_1 + ... + \lambda_n e_n = 0$ alors d'après la relation ci-dessus, $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$ et $(e_1, ..., e_n)$ est une famille libre.

De même dans l'espace $\mathbb{K}_n[X]$ les polynômes 1, X, X^2, ..., X^n forment une famille libre.

Proposition 1.2.2 *Toute famille contenant une famille liée est liée.*

PREUVE: Soit $p \leqslant n$ et soient $(u_1, \cdots, u_n)$ et $(v_1, \cdots, v_p)$ deux familles de vecteurs telles que $\{v_1, \cdots, v_p\} \subset \{u_1, \cdots, u_n\}$. Nous allons montrer que si $(u_1, \cdots, u_n)$ est libre alors $(v_1, \cdots, v_p)$ est libre aussi. Cela revient exactement à montrer la proposition.

Considérons des scalaires $\lambda_1, ..., \lambda_p$ tels que :

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i v_i = 0$$

alors :

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i v_i = \sum_{j=1}^{n} \mu_j u_j = 0$$

où pour tout j compris entre 1 et n, $\mu_j = \lambda_i$ s'il existe un entier i compris entre 1 et p tel que $v_i = u_j$ et $\mu_j = 0$ sinon. Comme $(u_1, ..., u_n)$ est libre, il s'ensuit que $\mu_1 = ... = \mu_n = 0$ et donc que $\lambda_1 = ... = \lambda_p = 0$.

□

Proposition 1.2.3 *Soient $x_1, ..., x_n$ des vecteurs* **linéairement indépendants**. *Soit $x \in E$. Alors $(x, x_1, ..., x_n)$ est liée si et seulement si x est combinaison linéaire de $x_1, ..., x_n$.*

Preuve: Supposons que $(x, x_1, ..., x_n)$ est liée. Alors il existe des scalaires $\lambda, \lambda_1, ..., \lambda_n$ non tous nuls tels que :

$$\lambda x + \lambda_1 x_1 + ... + \lambda_n x_n = 0$$

Si $\lambda = 0$, alors comme $(x_1, ..., x_n)$ est libre il s'ensuit que $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont tous nuls ce qui contredit l'hypothèse ci-dessus (puisqu'on a supposé les scalaires non tous nuls). Donc $\lambda \neq 0$ et :

$$x = -\frac{\lambda_1}{\lambda} x_1 - ... - \frac{\lambda_n}{\lambda} x_n$$

Donc x est combinaison linéaire de $x_1, ..., x_n$.

Réciproquement, supposons que x est combinaison linéaire de $x_1, ..., x_n$. Alors il existe des scalaires $\lambda_1, ..., \lambda_n$ tels que :

$$x = \lambda_1 x_1 + ... + \lambda_n x_n$$

On a donc :

$$\lambda x - \lambda_1 x_1 - ... - \lambda_n x_n = 0$$

avec $\lambda = 1 \neq 0$. Donc $(x, x_1, ..., x_n)$ est liée. □

De manière immédiate on en déduit le corollaire suivant :

Corollaire 1.2.1 *Soient $x_1, ..., x_n$ des vecteurs* **linéairement indépendants** *et F le sous-espace vectoriel engendré par $x_1, \ldots, x_n$. Soit $x \in E$. Alors $x \in F$ si et seulement si $(x, x_1, ..., x_n)$ est liée.*

1.2.3 Bases et dimension

Définition 1.2.5 *Une famille de vecteurs $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ est une* **base** *si elle est à la fois une famille* **libre** *et une famille* **génératrice***.*

Exemple: Considérons à nouveau la famille de vecteurs $(e_1, ..., e_n)$ de $\mathbb{K}^n$ défini plus haut par :

$$e_1 = (1, 0, ..., 0), \quad e_2 = (0, 1, ..., 0) \quad, ..., \quad e_n = (0, ..., 0, 1).$$

On a vu dans les exemples précédents que $(e_1, ..., e_n)$ est une famille génératrice et une famille libre d'où l'énoncé suivant :

Théorème et définition 1.2.1 *La famille de vecteurs $(e_1, ..., e_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$ et s'appelle la* **base canonique** *de $\mathbb{K}^n$.*

On a vu d'autre part que $(1, X, ..., X^n)$ engendre $\mathbb{K}_n[X]$ et est un famille libre. Donc $(1, X, ..., X^n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Théorème 1.2.1 *Soit $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de E. Alors pour tout vecteur x de E il existe des scalaires $x_1, ..., x_n$ tels que :*

$$x = x_1 e_1 + ... + x_n e_n$$

De plus les scalaires $x_1, ..., x_n$ sont uniques et s'appelle les **coordonnées** *de x dans la base $\mathcal{B}$.*

Preuve: D'après la définition de la base, $\mathcal{B}$ est un famille génératrice de E. Donc x s'écrit comme combinaison linéaire de $e_1, ..., e_n$ et il existe des scalaires $x_1, ..., x_n$ tels que $x = x_1 e_1 + ... + x_n e_n$.

Montrons maintenant que ces scalaires sont uniques. Soient $y_1, ..., y_n$ des scalaires tels que $x = y_1 e_1 + ... + y_n e_n$. Montrons que $x_i = y_i$ pour tout i compris entre 1 et n. On a :

$$0 = (x_1 - y_1)e_1 + ... + (x_n - y_n)e_n,$$

mais comme par définition $\mathcal{B}$ est libre, $x_1 - y_1 = x_2 - y_2 = ... = x_n - y_n = 0$.

□

Définition 1.2.6 *Un espace vectoriel est dit de* **dimension finie** *s'il peut être engendré par un nombre fini de vecteurs.*

Dans le cas contraire, il est dit de **dimension infinie***.*

Exemple: On a vu que $\mathbb{K}^n$ est engendré par les n vecteurs de la base canonique $e_1, ..., e_n$, donc $\mathbb{K}^n$ est de dimension finie. De même l'espace $\mathbb{K}_n[X]$ est engendré par $1, X, X^2, ..., X^n$ et est donc lui aussi de dimension finie.

Par contre, l'espace vectoriel $\mathbb{K}[X]$ des polynômes de degré quelconque est de dimension infinie. En effet supposons que ce ne soit pas le cas et que $\mathbb{K}[X]$ soit engendré par un nombre fini n de polynômes $P_1, ..., P_n$. Alors pour tout polynôme P de $\mathbb{K}[X]$ il existe des scalaires $\lambda_1, ..., \lambda_n$ tels que :

$$P = \lambda_1 P_1 + ... + \lambda_n P_n.$$

Soit d le degré du polynôme qui a le plus grand degré parmi $P_1, ..., P_n$. Alors les polynômes P_i sont de degré inférieur ou égal à d et il en est de même de P. Donc si P est de degré $d+1$ il ne peut s'écrire comme combinaison linéaire de $P_1, ..., P_n$ et $\mathbb{K}[X]$ est de dimension infinie.

Définition 1.2.7 *Soit A une famille finie de vecteurs de E. On dit qu'une famille L de vecteurs est une* **famille libre maximale extraite** *de A si $L \subset A$ et si $L \cup \{x\}$ est une famille liée pour tout $x \in A \setminus L$.*

Théorème 1.2.2 *Soit E un espace vectoriel de dimension finie tel que $E \neq \{0\}$. Soit A une famille génératrice de E. Alors une famille $\mathcal{B}$ extraite de A (i.e. $\mathcal{B} \subset A$) est une base si et seulement si $\mathcal{B}$ est une famille libre maximale.*

PREUVE: Soit $\mathcal{B} \subset A$, $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$. Supposons que $\mathcal{B}$ est une base. Alors tout $x \in A$ est combinaison linéaire des vecteurs $e_1, \ldots, e_n$, c'est-à-dire que $x = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n$. Donc $(e_1, \ldots, e_n, x)$ est liée pour tout $x \in A \setminus \mathcal{B}$. Donc $\mathcal{B}$ est une famille libre maximale extraite de A.

Réciproquement, soit $\mathcal{B}$ est une famille libre maximale extraite de A. Supposons que $A = (u_1, ..., u_N)$ et $\mathcal{B} = (u_1, ..., u_n)$ avec $n \leqslant N$. Comme $\mathcal{B}$ est libre maximale, il s'ensuit que $(u_1, ..., u_n, u_i)$ est liée pour tout i tel que $n+1 \leqslant i \leqslant N$. D'après la proposition 1.2.3, il s'ensuit que u_i est combinaison linéaire de $u_1, \ldots, u_n$.

Montrons maintenant que $\mathcal{B}$ est une famille génératrice de E. Comme $(u_1, ..., u_N)$ est une famille génératrice de E, pour tout vecteur x de E, il existe des scalaires $\lambda_1, ..., \lambda_n$ tels que :

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i u_i + \sum_{i=N+1}^{n} \lambda_i u_i.$$

Or le terme $\displaystyle\sum_{i=n+1}^{N} \lambda_i u_i$ est combinaison linéaire de $u_1, ..., u_n$. Il s'ensuit que tout $x \in E$ est combinaison linéaire de $u_1, ..., u_n$.

Donc $\mathcal{B}$ est génératrice et libre, c'est donc une base de E.

□

De ce théorème, on déduit de manière immédiate le corollaire suivant :

Corollaire 1.2.2 *Soit E un espace vectoriel de dimension finie tel que $E \neq \{0\}$. Alors de toute famille génératrice finie de E on peut extraire une base.*

Preuve: Soit A une famille génératrice finie de E. Comme $E \neq \{0\}$, il existe un vecteur $u \in A$ non nul et (u) est une famille libre ce qui signifie qu'il existe au moins une famille extraite de A qui est libre. Soit n le plus grand entier tel qu'il existe n vecteurs $u_1, \dots, u_n$ de A qui sont linéairement indépendants. Alors $(u_1, \dots, u_n)$ est une famille libre maximale extraite de A. Donc d'après le théorème précédent, c'est une base de E. □

Corollaire 1.2.3 *Tout espace vectoriel E de dimension fini admet une base.*

Preuve: Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Alors E est par définition engendré par une famille finie A. Si $E \neq \{0\}$, d'après le corollaire précédent on peut extraire de A une base.

Si $E = \{0\}$, alors $\emptyset$ est une base de E. □

Nous allons maintenant établir un lemme technique qui va nous permettre de déduire plusieurs résultats importants sur les bases.

Lemme 1.2.1 *Soient $x_1, x_2, ..., x_p$ des vecteurs de E et soient $y_1, y_2, ..., y_{p+1}$, $p+1$ vecteurs qui sont combinaisons linéaires de $x_1, x_2, ..., x_p$. Alors $y_1, y_2, ..., y_{p+1}$ sont linéairement dépendants.*

Preuve: Pour $p = 1$, on a $y_1 = \lambda_1 x_1$ et $y_2 = \lambda_2 x_1$. Cette relation prouve que y_1 et y_2 sont linéairement dépendants.

Nous allons raisonner par récurrence et supposer que le lemme est vrai au rang $p-1$. Montrons le au rang p. Soient $x_1, x_2, ..., x_p$ et $y_1, y_2, ..., y_{p+1}$ des vecteurs vérifiant les hypothèses du lemme. On peut alors écrire :

$$\left\{\begin{array}{lllllllll} y_1 & = & \alpha_{11}x_1 & + & \alpha_{12}x_2 & + & ... & + & \alpha_{1p}x_p \\ y_2 & = & \alpha_{21}x_1 & + & \alpha_{22}x_2 & + & ... & + & \alpha_{2p}x_p \\ \vdots & & \vdots & & & & & & \vdots \\ y_{p+1} & = & \alpha_{p+1,1}x_1 & + & \alpha_{p+1,2}x_2 & + & ... & + & \alpha_{p+1,p}x_p \end{array}\right.$$

où les α_{ij} sont des scalaires.

Si les α_{ip} sont nuls pour tous les i compris entre 1 et $p+1$ alors $y_1, ..., y_p$ sont combinaisons linéaires de $x_1, ..., x_{p-1}$. Donc par hypothèse de récurrence, $(y_1, ..., y_p)$ est liée et il en est de même de $y_1, y_2, ..., y_{p+1}$.

Supposons désormais que l'un des α_{ip} est non nul. Quitte à renuméroter les y_i, on peut supposer que $\alpha_{p+1,p} \neq 0$. Alors x_p peut s'écrire comme combinaison linéaire de $y_{p+1}, x_1, x_2, ..., x_{p-1}$. Il en résulte que tous les vecteurs $y_1, ..., y_p$ sont combinaison linéaire de $x_1, ..., x_{p-1}, y_{p+1}$.

Il existe donc des scalaires β_{ij} et γ_i tels que :

$$\begin{cases} y_1 & = & \beta_{11}x_1 & + & ... & + & \beta_{1,p-1}x_{p-1} & + & \gamma_1 y_{p+1} \\ y_2 & = & \beta_{21}x_1 & + & ... & + & \beta_{2,p-1}x_{p-1} & + & \gamma_2 y_{p+1} \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ y_p & = & \beta_{p1}x_1 & + & ... & + & \beta_{p,p-1}x_{p-1} & + & \gamma_p y_{p+1} \end{cases}$$

Donc les vecteurs $y_1 - \gamma_1 y_{p+1}, ..., y_p - \gamma_p y_{p+1}$ sont combinaisons linéaires de $x_1, ..., x_{p-1}$ et donc, d'après l'hypothèse de récurrence, ils forment une famille liée. Il existe alors des scalaires $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p$ non tous nuls tels que :

$$\lambda_1(y_1 - \gamma_1 y_{p+1}) + ... + \lambda_p(y_p - \gamma_p y_{p+1}) = 0.$$

Cette dernière relation peut encore s'écrire sous la forme :

$$\lambda_1 y_1 + ... + \lambda_p y_p + \lambda y_{p+1} = 0$$

où $\lambda = -\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \gamma_i$. Puisque $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p$ ne sont pas tous nuls, on en déduit que $(y_1, ..., y_{p+1})$ est liée, ce qui achève la démonstration.

$\square$

Remarque 1.2.2 *Évidemment si $q > p$ et si $y_1, \cdots, y_q$ sont q vecteurs combinaison linéaire de $x_1, \cdots, x_p$ alors $y_1, \cdots, y_q$ sont linéairement indépendants.*

On est maintenant en mesure d'énoncer le résultat fondamental suivant :

Théorème 1.2.3 *Dans un espace vectoriel de dimension finie, toutes les bases possèdent le même nombre d'éléments.*

Ce théorème justifie la définition qui suit :

Définition 1.2.8 *Dans un espace vectoriel $E \neq \{0\}$ de dimension finie, le nombre d'éléments que contient une base s'appelle la* **dimension** *et on le note* $\dim(E)$.

Remarque 1.2.3 $\emptyset$ *est une base de* $\{0\}$ *et* $\dim(\{0\}) = 0$.

La base canonique de $\mathbb{K}^n$ ayant exactement n éléments, on a immédiatement le théorème suivant :

Théorème 1.2.4 *Pour tout $n \geqslant 1$ on a $\dim(\mathbb{K}^n) = n$.*

Preuve du théorème 1.2.3: Soient $(e_1, ..., e_p)$ et $(f_1, ..., f_q)$ deux bases d'un espace vectoriel de dimension finie. Il s'agit de montrer que $p = q$.

Supposons d'abord que $q > p$. Comme $(e_1, ..., e_p)$ est une base, tous les vecteurs f_i sont combinaison linéaire de $e_1, ..., e_p$ et d'après le lemme précédent on en déduit que $(f_1, ..., f_q)$ est liée, ce qui est absurde puisque $(f_1, ..., f_q)$ est une base.

Si on suppose maintenant que $q < p$, alors en refaisant le même raisonnement que précédemment mais en échangeant le rôle des deux bases, on va montrer que $(e_1, ..., e_p)$ est liée, ce qui est encore absurde.

Donc on ne peut pas avoir $p \neq q$ et donc $p = q$.

□

On va maintenant donner la dimension des espaces vectoriels produit :

Théorème 1.2.5 *Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. Alors*

$$\dim(E \times F) = \dim(E) + \dim(F).$$

Preuve: Soient $(e_1, ..., e_p)$ une base de E et $(f_1, ..., f_q)$ une base de F. Soient $x \in E$ et $y \in F$. Alors il existe des scalaires $\lambda_1, ..., \lambda_p$ et $\mu_1, ..., \mu_q$ tels que :

$$x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i$$

et

$$y = \sum_{j=1}^{q} \mu_j e_j.$$

Donc

$$(x, y) = (\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i, 0) + (0, \sum_{j=1}^{q} \mu_j f_j) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i (e_i, 0) + \sum_{j=1}^{q} \mu_j (0, f_j),$$

et on en déduit que $((e_1, 0), ..., (e_p, 0), (0, f_1), ..., (0, f_q))$ est une famille génératrice de $E \times F$.

D'autre part, si $\lambda_1, ..., \lambda_p, \mu_1, ..., \mu_q$ sont des scalaires tels que :

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i (e_i, 0) + \sum_{j=1}^{q} \mu_j (0, f_j) = 0,$$

alors $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i = 0$ et $\sum_{j=1}^{q} \mu_j f_j = 0$. Mais comme $(e_1, ..., e_p)$ et $(f_1, ..., f_q)$ sont libres, on a $\lambda_1 = ... = \lambda_p = \mu_1 = ... = \mu_q = 0$.

Donc $((e_1, 0), ..., (e_p, 0), (0, f_1), ..., (0, f_q))$ est une famille libre et génératrice ; c'est donc une base et $\dim(E \times F) = \dim(E) + \dim(F)$.

□

On termine cette section par un théorème très important qui est le théorème de la base incomplète :

Théorème 1.2.6 de la base incomplète *Soit E un espace vectoriel de dimension n et soit $\mathcal{B}$ une base de E. Soit $(e_1, ..., e_p)$ une famille libre, avec $p \leqslant n$. Alors si :*

1. *$p = n$, $(e_1, ..., e_p)$ est une base.*
2. *$p < n$, on peut compléter le famille $(e_1, ..., e_p)$ par $n - p$ vecteurs $(f_1, ..., f_{n-p})$ de la base $\mathcal{B}$ de telle manière que $(e_1, ..., e_p, f_1, ..., f_{n-p})$ soit une base de E.*

Preuve: Posons $\mathcal{B} = (g_1, ..., g_n)$.

Supposons d'abord que $p = n$. Comme $(e_1, ..., e_n)$ est libre, il suffit de démontrer qu'elle est génératrice pour qu'elle soit une base.

Soit $x \in E$. Alors $x, e_1, ..., e_n$ sont $n + 1$ vecteurs qui sont combinaisons linéaires de $g_1, ..., g_n$. D'après le lemme 1.2.1, on en déduit que $(x, e_1, ..., e_n)$ est liée et d'après la proposition 1.2.3, x est combinaison linéaire de $e_1, ..., e_n$. Or on a démontré ceci pour tout $x \in E$, donc $(e_1, ..., e_n)$ est une famille génératrice de E et donc une base. Le point 1. est démontré.

Considérons maintenant le cas $p < n$ qu'on va montrer par récurrence. Supposons d'abord que $p = n - 1$. Si les vecteurs $g_1, \cdots, g_n$ sont tous combinaison linéaire de $e_1, \cdots, e_{n-1}$, d'après le lemme 1.2.1, $(g_1, \cdots, g_n)$ est liée ce qui est absurde. Donc il existe $i \in \{1, \cdots, n\}$ tel que g_i ne soit pas combinaison linéaire de $e_1, \cdots, e_{n-1}$. D'après la proposition 1.2.3 $(e_1, \cdots, e_{n-1}, g_i)$ est libre et d'après le point 1., c'est une base.

On va maintenant supposer le résultat vrai pour p compris entre 2 et $n-1$. Autrement dit on suppose que toute famille de p vecteurs peut être complétée par $n - p$ vecteurs de la base $\mathcal{B}$.

Montrons alors que c'est vrai au rang $p-1$: soit $(e_1, ..., e_{p-1})$ une famille libre. De même que précédemment, il existe $i \in \{1, \cdots, n\}$ tel que $(e_1, \cdots, e_{p-1}, g_i)$ est libre. Comme par hypothèse de récurrence, on suppose le résultat vrai pour p vecteurs, on peut compléter $(e_1, ..., e_{p-1}, g_i)$ par $n - p$ vecteurs de $\mathcal{B}$ pour obtenir une base. On a donc complété $(e_1, ..., e_{p-1})$ par $n - (p - 1)$ vecteurs de $\mathcal{B}$ pour obtenir une base de E et le résultat est vrai au rang $p - 1$.

□

1.2.4 Relations entre famille génératrice, libre, base et dimension

Les énoncés qui suivent sont extrêment importants, car il serve constamment dans la pratique.

Théorème 1.2.7 *Soit E un espace vectoriel de dimension n et $A = (x_1, ..., x_p)$ une famille de vecteurs :*

1. *Si A est libre alors $p \leqslant n$.*
2. *Si A est génératrice alors $p \geqslant n$.*

PREUVE: Supposons que A est libre. Soit $(e_1, ..., e_n)$ une base de E. Alors tous les vecteurs $x_1, ..., x_p$ sont combinaisons linéaires de $e_1, ..., e_n$. Si $p > n$, par le lemme 1.2.1, $x_1, ..., x_p$ sont linéairement dépendants ce qui contredit l'hypothèse que A est libre donc $p \leqslant n$ et le point 1. est démontré.

Supposons maintenant que A est génératrice. Si $p < n$, alors d'après le théorème 1.2.2 on peut extraire une base de A dont le nombre q d'éléments vérifie $q \leqslant p < n$, ce qui n'est pas possible puisque toutes les bases ont n éléments. Il s'ensuit que $p \geqslant n$, ce qui achève la preuve de 2.

□

Théorème 1.2.8 *Soit E un espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B} = (x_1, ..., x_n)$ une famille de n vecteurs. Alors, il y a équivalence entre :*

1. *$\mathcal{B}$ est une base.*
2. *$\mathcal{B}$ est libre.*
3. *$\mathcal{B}$ est génératrice.*

PREUVE: 1. entraîne 2. car si $\mathcal{B}$ est une base, $\mathcal{B}$ est forcément libre.

Montrons maintenant que 2. entraîne 3 : d'après le point 1. du théorème de la base incomplète, $\mathcal{B}$ est une base ; c'est donc un famille génératrice.

Supposons maintenant que 3. est vrai et montrons que cela entraîne que 1. est vrai. Par le théorème 1.2.2, on peut extraire une base de $\mathcal{B}$. Mais comme E est de dimension n, la base extraite a n vecteurs et comme $\mathcal{B}$ possède n éléments, on en déduit que $\mathcal{B}$ est une base et 1. est vrai.

□

1.2.5 Dimension d'un sous-espace vectoriel

Théorème 1.2.9 *Soit E un espace vectoriel de dimension n et F un sous-espace vectoriel de E. Alors :*

1. *F est de dimension finie.*
2. $\dim F \leqslant \dim E$.
3. *Si* $\dim F = \dim E$ *alors* $F = E$.

PREUVE: D'après le théorème 1.2.7 toute famille libre ayant au plus n éléments, on en déduit que toute famille libre de F a au plus n éléments. Considérons une famille $(x_1, ..., x_p)$ de vecteurs linéairement indépendants de F qui possède le plus grand nombre possible d'éléments. Alors $p \leqslant n$. On va montrer que $(x_1, ..., x_p)$ est une base de F. Pour cela, montrons que $(x_1, ..., x_p)$ engendre F. Soit $x \in F$ et considérons le famille de $p + 1$ vecteurs $(x, x_1, ..., x_p)$. Cette famille ne peut pas être libre, car sinon cela contredirait la définition de p. Donc $(x, x_1, ..., x_p)$ est liée et par le corollaire 1.2.1, x est combinaison linéaire de $(x_1, ..., x_p)$. Donc $(x_1, ..., x_p)$ est une base. Les points 1. et 2. sont démontrés.

Supposons maintenant que F est un sous-espace de dimension n. Soit $(x_1, ..., x_n)$ une base de F. On a donc une famille libre de n vecteurs. Par le théorème 1.2.8, $(x_1, ..., x_n)$ est aussi une base de E. Donc $(x_1, ..., x_n)$ engendre E, donc $E = F$.

□

Définition 1.2.9 *On appelle* **rang** *d'une famille de vecteurs $(x_1, ..., x_p)$ et on note $rg(x_1, ..., x_p)$, la dimension du sous-espace vectoriel engendré par $(x_1, ..., x_p)$.*

Proposition 1.2.4 *Une famille de vecteurs $(x_1, ..., x_p)$ est libre si et seulement si $rg(x_1, ..., x_p) = p$.*

1.3 Somme de sous-espaces vectoriels

1.3.1 Définition et propriétés

Définition 1.3.1 *Soit E un espace vectoriel sur un corps K et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors on appelle* **somme** *de F et G, l'ensemble $F + G$ défini par :*

$$F + G = \{z \in E \;\mid\; z = x + y \;\mid\; x \in F \quad et \quad y \in G\}$$

Proposition 1.3.1 *Soit E un espace vectoriel sur un corps K et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E.*

Proposition 1.3.2 *Soit E un espace vectoriel sur un corps K et F et G deux sous-espaces vectoriels de E engendrés respectivement par $(u_1, \cdots, u_p)$ et $(v_1, \cdots, v_q)$. Alors $F + G$ est engendré par $(u_1, \cdots, u_p, v_1, \cdots, v_q)$.*

1.3.2 Somme directe

Définition 1.3.2 *Soient E un espace vectoriel sur un corps K et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On dit que F et G sont en* **somme directe** *si tout $x \in F+G$ s'écrit de manière* **unique** *sous la forme $x = y + z$ où $y \in F$ et $z \in G$.*

Si F et G sont en somme directe, on note $F + G = F \oplus G$.

Proposition 1.3.3 *Soient E un espace vectoriel sur un corps K et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors les trois propositions suivantes sont équivalentes :*

1. *F et G sont en somme directe.*
2. *$F \cap G = \{0\}$.*
3. *Pour tout $(x, y) \in F \times G$, si $x + y = 0$ alors $x = y = 0$.*

Preuve:

1. Montrons que 1) implique 2).
   Soit $x \in F \cap G$. Alors $x = x + 0$ avec $x \in F$ et $0 \in G$. De même on peut écrire $x = 0 + x$ avec $0 \in F$ et $x \in G$. Comme on suppose F et G en somme directe, cela signifie qu'il y a unicité de l'écriture, ce qui permet de déduire que $x = 0$. Donc $F \cap G = \{0\}$.
2. Montrons que 2) implique 3).
   Soit $(x, y) \in F \times G$ avec $x + y = 0$. Alors en remarquant que $x = -y$, on déduit que $x \in F \cap G$ donc $x = y = 0$.
3. Montrons que 3) implique 1).
   Soit $x \in F + G$, alors il existe $(y, z) \in F \times G$ tel que $x = y + z$. Supposons qu'il existe un autre couple $(y', z') \in F \times G$ tel que $x = y' + z'$. Alors :
   $$y + z = y' + z'$$
   ce qui implique que :
   $$(y - y') + (z - z') = 0$$
   Mais $y - y' \in F$ et $z - z' \in G$. Comme on a supposé 3), on déduit que $y - y' = 0$ et $z - z' = 0$ puis $y = y'$ et $z = z'$. Donc l'écriture est unique ce qui prouve 1).

$\square$

Remarque 1.3.1 *Dans la pratique, pour montrer que deux sous-espaces F et G sont en somme directe, on utilisera presque toujours le critère : F et G sont en somme directe si et seulement si $F \cap G = \{0\}$.*

Proposition 1.3.4 *Soient E un espace vectoriel sur un corps K et F et G deux sous-espaces vectoriels de E de dimension finie. Alors si F et G sont en somme directe, on a :*

$$\dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G)$$

De plus si $(e_1, \cdots, e_n)$ et $(f_1, \cdots, f_p)$ sont des bases respectivement de F et G, alors $(e_1, \cdots, e_n, f_1, \cdots, f_p)$ est une base de $F \oplus G$.

Preuve: Soient $(e_1, \cdots, e_n)$ une base de F et $(f_1, \cdots, f_p)$ une base de G. D'après la proposition 1.3.2 $(e_1, \cdots, e_n, f_1, \cdots, f_p)$ est une famille génératrice de $F \oplus G$. Montrons que c'est une famille libre.

Soient $\lambda_1, \cdots, \lambda_n, \mu_1, \cdots, \mu_p$ des scalaires tels que :

$$\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n + \mu_1 f_1 + \cdots + \mu_p f_p = 0$$

On a $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \in F$ et $\sum_{j=1}^{p} \mu_j f_j \in G$. D'après l'assertion 2) de la proposition précédente, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0$ et $\sum_{j=1}^{p} \mu_j f_j = 0$. Comme $(e_1, \cdots, e_n)$ et $(f_1, \cdots, f_p)$ sont libres, $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = \mu_1 = \cdots = \mu_p = 0$ et $(e_1, \cdots, e_n, f_1, \cdots, f_p)$ est une base de $F \oplus G$ ce qui achève la preuve.

$\square$

1.3.3 Supplémentaires

Définition 1.3.3 *Soit E un espace vectoriel sur un corps K et soit F un sous-espace vectoriel de E. Un sous-espace vectoriel G de E est appelé* **supplémentaire** *de F dans E si $E = F \oplus G$.*

Remarque 1.3.2 *Évidemment, si G est un supplémentaire de F dans E, F est un supplémentaire de G dans E et on dira plus simplement que F et G sont supplémentaires dans E.*

Théorème 1.3.1 *Tout sous-espace vectoriel F d'un espace vectoriel E admet au moins un supplémentaire G dans E.*

Preuve: On fait la preuve uniquement dans le cas de la dimension finie. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E et $\mathcal{B}' = (f_1, \cdots, f_p)$ une base de F $(p \leqslant n)$. Le théorème de la base incomplète nous dit qu'il existe $n - p$ vecteurs de $\mathcal{B}$, $e_{i_1}, \cdots, e_{i_{n-p}}$ tels que $\mathcal{B}'' = (f_1, \cdots, f_p, e_{i_1}, \cdots, e_{i_{n-p}})$ soit une base de E. Considérons G le sous-espace vectoriel engendré par $(e_{i_1}, \cdots, e_{i_{n-p}})$. Alors il est facile de vérifier que G est un supplémentaire de F dans E.

$\square$

1.3.4 La formule de Grassmann et ses applications

Théorème 1.3.2 Formule de Grassmann *Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors :*

$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$$

On a alors immédiatement le corollaire suivant :

Corollaire 1.3.1 *Si E est un espace vectoriel de dimension finie et si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E tels que $\dim F + \dim G > \dim E$, alors $F \cap G \neq \{0\}$.*

PREUVE: Comme $F + G \subset E$, alors $\dim(F+G) \leqslant \dim E$. Donc de la formule de Grassmann on déduit que :

$$\begin{aligned} \dim F + \dim G &\leqslant \dim(F \cap G) + \dim E \\ &< \dim(F \cap G) + \dim F + \dim G \end{aligned}$$

donc $\dim(F \cap G) > 0$ et $F \cap G \neq \{0\}$.

□

On déduit aussi de la formule de Grassmann un critère permettant de caractériser les supplémentaires.

Corollaire 1.3.2 *Soit E de dimension finie et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors F et G sont supplémentaires dans E si et seulement si deux des trois propriétés suivantes sont satisfaites :*

1. $F \cap G = \{0\}$.
2. $F + G = E$.
3. $\dim F + \dim G = \dim E$.

PREUVE: Remarquons d'abord que par définition F et G sont supplémentaires si 1) et 2) sont satisfaites. D'autre part de la formule de Grassmann on déduit que si F et G sont supplémentaires alors les trois assertions sont vérifiées.

Réciproquement, si 1) et 3) sont satisfaites alors $\dim(F+G) = \dim F + \dim G = \dim E$. Donc $F+G$ est un sous-espace de même dimension que E. Donc $F+G = E$, ce qui implique 2) et le fait que F et G sont supplémentaires.

Si 2) et 3) sont vérifiées, la formule de Grassmann implique que $F \cap G = \{0\}$ et 1) est satisfaite. Donc F et G sont supplémentaires. □

PREUVE DE LA FORMULE DE GRASSMANN : Posons $E' = F + G$. $F \cap G$ étant un sous-espace vectoriel de G, soit H un supplémentaire de $F \cap G$ dans G. On a donc $G = (F \cap G) \oplus H$.

Montrons que $E' = F \oplus H$:

Soit $x \in E'$, alors $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in G$ car $E' = F + G$. Mais comme $G = (F \cap G) \oplus H$, il existe $z' \in F \cap G$ et $z'' \in H$ tels que $z = z' + z''$. Comme $y + z' \in F$, on en déduit que $E' = F + H$.

Montrons maintenant que $F \cap H = \{0\}$:

Soit $x \in F \cap H$, alors $x \in F$ et $x \in H \subset G$ donc $x \in F \cap G$. Or $(F \cap G) \cap H = \{0\}$ car $F \cap G$ et H sont supplémentaire dans G, donc $x = 0$.

On a donc montré que $E' = F \oplus H$ et en utilisant la proposition 1.3.4 $\dim E' = \dim F + \dim H$ et $\dim G = \dim(F \cap G) + \dim H$ (car $G = (F \cap G) \oplus H$). Ceci conduit à $\dim E' = \dim F + (\dim G - \dim(F \cap G))$ et comme $E' = F + G$, on obtient le résultat demandé.

□

1.3.5 Sommes de plusieurs sous-espaces vectoriels

Définition 1.3.4 *Soit E un espace vectoriel sur un corps K et $F_1,\ldots,F_n$ des sous-espaces vectoriels de E. On appelle* **somme** *de $F_1,\ldots,F_n$, l'ensemble $F_1 + \cdots + F_n = \sum_{i=1}^{n} F_i$ défini par :*

$$\sum_{i=1}^{n} F_i = \{z \in E \mid z = x_1 + \cdots + x_n \mid x_1 \in F_1, \cdots, x_n \in F_n\}$$

Évidemment on a immédiatement la proposition suivante :

Proposition 1.3.5 *Soit E un espace vectoriel sur un corps K et $F_1,\ldots,F_n$ des sous-espaces vectoriels de E. Alors $\sum_{i=1}^{n} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E.*

De manière similaire au cas de deux sous-espaces vectoriels on définit la somme directe d'un nombre quelconque fini de sous-espaces vectoriels.

Définition 1.3.5 *Soit E un espace vectoriel sur un corps K et $F_1,\ldots,F_n$ des sous-espaces vectoriels de E. On dit que $F_1,\ldots,F_n$ sont en* **somme directe** *si tout x de $F_1 + \cdots + F_n$ s'écrit de manière* **unique** *sous la forme :*

$$x = x_1 + \cdots + x_n$$

avec $x_i \in F_i$.

Si $F_1, \cdots, F_n$ sont en somme directe, on écrit alors :

$$\sum_{i=1}^{n} F_i = \bigoplus_{i=1}^{n} F_i$$

Proposition 1.3.6 *Soit E un espace vectoriel sur un corps K et $F_1, \cdots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de E. Alors $F_1, \cdots, F_n$ sont en somme directe si et seulement si $(x_1, \cdots, x_n) \in F_1 \times \cdots \times F_n$ et $x_1 + \cdots + x_n = 0$ entraîne $x_1 = \cdots = x_n = 0$.*

Remarque 1.3.3 *Si $F_1, \cdots, F_n$ sont en somme directe, alors pour tout entier $i \neq j$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, F_i et F_j sont en somme directe.*

Attention ! La réciproque est fausse ! ! !

Proposition 1.3.7 *Soit E un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$ et $F_1, \cdots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de E en somme directe. Alors :*

$$\dim \left(\bigoplus_{i=1}^{n} F_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \dim F_i$$

Remarque 1.3.4 *La notion de somme de sous-espaces vectoriels généralise la notion de famille génératrice. En effet si un espace vectoriel E est engendré par une famille de vecteurs $(e_1, \cdots, e_n)$, alors tout vecteur x de E s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs $e_1, \cdots, e_n$. Or pour tout i ($1 \leqslant i \leqslant n$), le sous-espace engendré par e_i n'est rien d'autre que le sous-espace*

$$\langle e_i \rangle = \{\lambda e_i \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$$

ce qui permet de voir que $(e_1, \cdots, e_n)$ est une famille génératrice de E si et seulement si $E = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i \rangle$.

De même la notion de somme directe de sous-espaces vectoriels généralise celle de famille libre. En effet soit $(e_1, \cdots, e_n)$ une famille libre, on sait par définition que si $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0$ alors $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$. Ceci revient à dire que si $x_1 \in \langle e_1 \rangle, \cdots, x_n \in \langle e_n \rangle$ et $x_1 + \cdots + x_n = 0$ alors $x_1 = \cdots = x_n = 0$. Autrement dit $(e_1, \cdots, e_n)$ est libre si et seulement si $\langle e_1 \rangle, \cdots, \langle e_n \rangle$ sont en somme directe.

C'est la raison pour laquelle, dans certains livres, on dira aussi que des sous-espaces vectoriels sont linéairement indépendants pour dire qu'ils sont en somme directe.

1.4 Exercices

1. Dans l'espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ de toutes les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles, muni des lois usuelles, étudier si les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$:

$$\begin{array}{lcl}
\mathcal{F}_0 = \{f \mid f(0)=0\} & , & \mathcal{S} = \{f \text{ deux fois dérivable} \mid f''+f=0\} \\
\mathcal{F}_1 = \{f \mid f(0)=1\} & , & \mathcal{I} = \left\{ f \text{ continue} \mid \int\limits_0^1 f(t)\,dt = 0 \right\} \\
\mathcal{B} = \{f \text{ bornée}\} & , & \mathcal{E}_\ell = \left\{ f \text{ continue} \mid \lim\limits_{x\mapsto\pm\infty} f(x) = \ell \right\}
\end{array}$$

2. On considère l'espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{R})$ des suites de nombres réels.
(a) Montrer que l'ensemble des suites qui convergent vers zéro est un sous-espace vectoriel.
(b) Montrer que l'ensemble des suites bornées est un sous-espace vectoriel.
(c) L'ensemble des suites convergentes est-il un sous-espace vectoriel ?

3. Soit E un espace vectoriel de dimension 2 muni d'une base (e_1,e_2). Les sous-ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de E ?

$$A := \{xe_1+ye_2\ ;\ 2x-y=0\}\ ,\ \ B := \{xe_1+ye_2\ ;\ 2x-y=0\}\cup\{xe_1+ye_2\ ;\ x-2y=0\}$$

4. Soit E un espace vectoriel de dimension 2 et de base $\mathcal{B}=(e_1,e_2)$. Les familles de vecteurs suivants de E sont-elles des familles libres ou liées ? Sont-elles des bases ? Pour chacune de ces familles, donner son rang. Pour les familles liées en extraire une famille libre maximale et pour les familles libres les compléter par des vecteurs de $\mathcal{B}$ pour obtenir une base de E.

1) $(2e_1+e_2\ ,\ -e_1+e_2)$; 2) $(-6e_1+2e_2\ ,\ 9e_1-3e_2)$; 3) $(2e_2\ ,\ e_1+2e_2\ ,\ -e_1+2e_2)$.

5. Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et de base $\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3)$. Pour chacune des familles de vecteurs suivants de E, répondre aux mêmes questions que dans l'exercice précédent.

1) $(e_1+e_2+e_3\ ,\ -e_1+e_2+e_3)$; 2) $(e_1-e_3\ ,\ -e_1+e_2\ ,\ -e_2+e_3)$;
3) $(e_1+e_2+e_3\ ,\ 2e_1-e_2+2e_3\ ,\ e_1-2e_2-e_3)$;

6. Soit $\mathbb{R}^4$ muni de sa base canonique. Pour chacune des familles de vecteurs suivants de $\mathbb{R}^4$, répondre aux mêmes questions que dans l'exercice précédent.

4) $((10,-5,15,20)\ ,\ (-4,2,-6,-8))$;
5) $((2,1,3,1)\ ,\ (1,1,0,-1)\ ,\ (0,1,1,1)\ ,\ (1,2,1,0)\ ,\ (1,0,-1,-2))$.

7. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 4 de base (e_1, e_2, e_3, e_4). On considère les vecteurs de E suivants :

$$u_1 = 2e_1 + e_2 + 3e_4, \quad u_2 = 3e_1 - e_2 + 5e_3 + 2e_4, \quad u_3 = -e_1 + 2e_3 + e_4$$

Soit F le sous-espace vectoriel engendré par u_1, u_2, u_3. Déterminer une base de F. Le vecteur $v = 2e_1 + 3e_2 - 7e_3 + 3e_4$ appartient-il à F ? Dans le cas où $v \in F$, déterminer les coordonnées de v dans cette base.

8. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension 3 et de base (e_1, e_2, e_3). On considère les vecteurs de E suivants :

$$u_1 = (1-i)e_1 + ie_2 + (1+i)e_3, \quad u_2 = -e_1 + e_2 + 3e_3, \quad u_3 = (1-i)e_1 + ie_2 + ie_3$$

(a) Montrer que (u_1, u_2, u_3) est une base de E.
(b) Calculer les coordonnées du vecteur $v = (1+i)e_1 + 2e_2 + ie_3$ dans la base (u_1, u_2, u_3).

9. Soient E et F les sous-espaces de $\mathbb{R}^4$ définis par les systèmes d'équations suivants :

$$E\ :\ \begin{cases} x+y+z+t=0 \\ 2x-y+z=0 \end{cases} \quad , \quad F\ :\ \begin{cases} x-2y-t=0 \\ x-t=0 \end{cases}$$

Déterminer une base de $E \cap F$.

10. Soit $\mathbb{R}^4$ muni de sa base canonique et soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ défini par le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} x+2y-5z-t &= 0 \\ x-y+z+2t &= 0 \end{cases}$$

1) Trouver une base de F et déterminer la dimension de F.
2) Soit G le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par $u = (0,3,1,1)$, $v = (1,-1,1,1)$ et $w = (2,0,1,-1)$. Déterminer une base et la dimension de G.
3) Déterminer un système d'équations de G.
4) Déterminer une base et la dimension de $F \cap G$.

11. On considère dans $\mathbb{R}^3$ les trois sous-espaces vectoriels F, G, H définis respectivement par :

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0 \text{ et } y = z\} \ ,$$

$$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0\} \text{ et } H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\} \ .$$

a) Donner leur dimension. Déterminer une base et la dimension des sous-espaces $F \cap G$, $F \cap H$, $G \cap H$, $F + G$, $F + H$, $G + H$.

b) Montrer que $(F \cap G) + (F \cap H) \neq F \cap (G + H)$ et que $(F + G) \cap (F + H) \neq F + (G \cap H)$.

12. Déterminer une base de chacun des sous-espaces vectoriels F, G, $F + G$, $F \cap G$ de l'espace vectoriel E de dimension 4 muni de la base (e_1, e_2, e_3, e_4). Vérifier la formule de Grassmann.

1. $F = \langle e_1 + e_2 + e_4, 2e_1 + e_2 + e_3, e_2 + e_3 \rangle$ et $G = \langle e_1 + e_2 + e_3 + e_4, 2e_1 + e_2 \rangle$.
2. $F = \langle e_1 + 2e_2 + 3e_3 + 4e_4, 2e_1 + 2e_2 + 2e_3 + 6e_4, 2e_2 + 4e_3 + 4e_4 \rangle$ et
   $G = \langle e_1 - e_3 + 2e_4, 2e_1 + 3e_2 + e_4 \rangle$.

13. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 4 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ une base de E. Considérons les vecteurs

$$u = -e_1 + e_3 \quad , \quad v = e_1 + e_2 - e_3 \quad , \quad w = e_1 + e_2 + e_3 - e_4$$

$$a = 2e_1 + e_2 - e_4 \quad , \quad b = e_1 + e_3 + e_4$$

On considère d'autre part les sous-espaces vectoriels F et G engendrés respectivement par (u, v, w) et (a, b).

1) Déterminer une base et la dimension respectivement de F et de G. Écrire la formule de Grassmann et en déduire que F et G ne sont pas en somme directe.

2) Déterminer une base et la dimension de $F + G$. En déduire la dimension de $F \cap G$.

3) Trouver un système d'équations de F et de G, puis en déduire un système d'équations de $F \cap G$ et une base de $F \cap G$.

4) Compléter la base de $F \cap G$ obtenue à la question précédente par des vecteurs de $\mathcal{B}$ pour obtenir une base de E. En déduire un supplémentaire de $F \cap G$ dans E.

14. Soit E un espace vectoriel de dimension 5 de base $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$. Soit α un nombre réel. Considérons les sous-espaces vectoriels $F = \langle e_1 - 2e_3 + e_5, -e_1 + e_2 + 4e_3 + 5e_4 \rangle$ et $G = \langle e_2 - 5e_3 + 2e_4 + 4e_5, 2e_1 + e_2 - 16e_3 - e_4 + \alpha e_5 \rangle$. Sont-ils supplémentaires ? Leur somme est-elle directe ?

15. Soit E un espace vectoriel sur un corps K et $x_1, \cdots, x_n$, n vecteurs de E. Montrer que $(x_1, \cdots, x_n)$ est une famille libre si et seulement si aucun des vecteurs de la famille ne peut s'écrire comme combinaison linéaire des autres.

16. Soit E un espace vectoriel sur un corps K et $x_1, \cdots, x_n$, n vecteurs de E.

1) On considère les vecteurs $y_1 = x_1 - x_2$, $y_2 = x_2 - x_3$,...,$y_{n-1} = x_{n-1} - x_n$ et $y_n = x_n - x_1$. Sont-ils linéairement indépendants ?

2) On suppose que n est impaire. Montrer que si les vecteurs $x_1, \cdots, x_n$ sont linéairement indépendants alors il en est de même des vecteurs $y_1 = x_1 + x_2$, $y_2 = x_2 + x_3$,...,$y_{n-1} = x_{n-1} + x_n$ et $y_n = x_n + x_1$.

Que se passe-t-il si n est paire ?

17. Dans un espace vectoriel quelconque E on considère trois sous-espaces F, G, H.

a) Montrer que l'on a toujours

$$(F \cap G) + (F \cap H) \subset F \cap (G + H) \text{ et } (F + G) \cap (F + H) \supset F + (G \cap H) .$$

Que déduit-on de l'exercice 11 b) ?

b) Montrer que si l'on a $F + G = E$, $F \cap H = \{0\}$ et $G \subset H$, alors $G = H$.

c) Montrer l'identité :

$$(F \cap (G + H)) + (G \cap H) = (F + (G \cap H)) \cap (G + H) .$$

18. Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note F l'ensemble des fonctions paires (ie $f(-x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$) et G l'ensemble des fonctions impaires (ie $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$).

1) Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.

2) Montrer que F et G sont supplémentaires dans E.

19. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

20. Soient E et F deux espaces vectoriels sur un corps K. Montrer que si $E \times F$ est de dimension finie alors E et F sont de dimension finie.

21. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de dimension 2 de $\mathbb{R}^4$. Montrer que

— ou bien F et G sont supplémentaires.

— ou bien il existe trois vecteurs distincts $x,\ y,\ z$ tels que $F = \langle x, y\rangle$ et $G = \langle y, z\rangle$.

— ou bien $F = G$.

22. Soient a et b deux réels fixés, on considère l'ensemble suivant :

$$\mathcal{A} = \{(u_n)_{n \geqslant 0} \mid \forall\ n \in \mathbb{N}\ ,\ u_{n+1} = (an + b)u_n\}$$

(a) Montrer que $\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace des suites.
(b) Montrer qu'il est de dimension finie et donner sa dimension.

23. Soit E le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des suites à termes complexes et a, b deux nombres complexes. On considère F l'ensemble des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de E telles que $u_{n+2} = au_{n+1}+bu_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

(b) Soit r un nombre complexe non nul. Montrer que la suite $(r^n)_{n\geqslant 0}$ appartient à F si et seulement si $r^2 = ar + b$.

On suppose désormais que $a = 2$ et $b = -5$.

(c) Trouver deux nombres complexes α et β tels que les suites $(\alpha^n)_{n\geqslant 0}$ et $(\beta^n)_{n\geqslant 0}$ appartiennent à F.

(d) Soient $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ des suites appartenant à F telles que $u_0 = v_0$ et $u_1 = v_1$. Montrer que $u_n = v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(e) Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite appartenant à F. Montrer qu'il existe des nombres complexes λ et μ tels que $u_n = \lambda\alpha^n + \mu\beta^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(f) Donner une base et la dimension de F.

24. (a) Dans $\mathbb{R}[X]$ on considère les polynômes

$$P_1(X) = X(X-1)(X-2)\ ,\ P_2(X) = X(X-2)(X-3)\ ,$$

$$P_3(X) = X(X-1)(X-3)\ ,\ P_4(X) = (X-1)(X-2)(X-3)\ .$$

Forment-ils une famille libre ?

(b) Même question pour les polynômes

$$Q_1(X) = (X-1)^3\ ,\ Q_2(X) = (X-1)^2(X-2)\ ,\ Q_3(X) = (X-1)(X-2)^2\ ,\ Q_4(X) = (X-2)^3\ .$$

25. Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ on considère les fonctions f_k et g_k définies par

$$f_0(x) = 1\ ,\ f_k(x) = \cos kx \text{ et } g_k(x) = \sin kx$$

pour tout entier k compris entre 1 et n.

(a) Montrer par récurrence que $(f_0, f_1, g_1, ..., f_n, g_n)$ forme une famille libre .

(b) Soit $\mathcal{A}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ engendré par $(f_0, f_1, g_1, f_2, g_2)$ et soit $h : x \longmapsto 1 + \sin x + \sin 2x$. Après avoir donné une base et la dimension de $\mathcal{A}$, déterminer si la famille formée de h et de ses 4 premières dérivées est une base de $\mathcal{A}$.

26. 1) Montrer que l'espace vectoriel $K[X]$ des polynômes de degré quelconque est de dimension infinie.

2) En déduire que l'espace vectoriel des fonctions $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est de dimension infinie.

27. Déterminer une base et la dimension du sous-espace vectoriel F de $\mathcal{F}(]-1,1[,\mathbb{R})$ engendré par les fonctions $(f_i)_{1\leqslant i\leqslant 4}$ où pour tout x de $]-1,1[$:

$$f_1(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \quad , \quad f_2(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}},$$

$$f_3(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad , \quad f_4(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Chapitre 2

APPLICATIONS LINÉAIRES

2.1 Définitions et généralités

Définition 2.1.1 *Soient E et F deux K-espaces vectoriels. Une* **application linéaire** *de E dans F est une application $f : E \longrightarrow F$ telle que :*

— $f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \forall x, y \in E.$

— $f(\lambda x) = \lambda f(x) \quad \forall x \in E, \forall \lambda \in K.$

Voici une autre définition équivalente à la précédente :

Définition 2.1.2 *Soient E et F deux K-espaces vectoriels. Une* **application linéaire** *de E dans F est une application $f : E \longrightarrow F$ telle que :*

$$f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y) \quad \forall x, y \in E \quad et \quad \lambda, \mu \in K$$

Remarque 2.1.1 *On a toujours $f(0) = 0$. En effet soit $x \in E$, alors $f(0) = f(0x) = 0f(x) = 0$.*

Définition 2.1.3 *Soit E un espace vectoriel. Un* **endomorphisme** *de E est une application linéaire de E dans lui-même.*

Exemples d'applications linéaires :

1. $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & ax \end{array}$ est une application linéaire de l'espace vectoriel $\mathbb{R}$ dans lui-même.
2. Soit E un espace vectoriel quelconque. Alors :

$$\begin{array}{cccc} \mathrm{Id}_E & : & E & \to & E \\ & & x & \mapsto & \mathrm{Id}_E(x) = x \end{array}$$

est une application linéaire.

3. De même si E désigne l'espace des fonctions continues sur $[a, b]$, alors l'application :

$$\begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \displaystyle\int_a^b f(t)dt \end{array}$$

est linéaire.

Proposition 2.1.1 *Soient E et F deux K-espaces vectoriels et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Soient $\lambda_1, ..., \lambda_p \in K$ et $x_1, ..., x_p \in E$. Alors :*

$$f\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f(x_i)$$

Proposition 2.1.2 *Soient E et F deux K-espaces vectoriels de dimension finie munis respectivement des bases $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_p)$ et $\mathcal{B}' = (f_1, \cdots, f_q)$. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. Alors f est une application linéaire si et seulement si pour tout vecteur x de E, les coordonnées de $f(x)$ dans la base $\mathcal{B}'$ s'écrivent comme* **combinaison linéaire** *des coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$.*

Autrement dit f est une application linéaire si et seulement si il existe des coefficients (a_{ij}) , ($1 \leqslant i \leqslant q$ et $1 \leqslant j \leqslant p$) tels que :

$$\begin{aligned} f(x_1e_1 + \cdots + x_pe_p) = (a_{11}x_1 + \cdots + a_{1p}x_p)f_1 + (a_{21}x_1 + \cdots + a_{2p}x_p)f_2 + \cdots \\ \cdots + (a_{q1}x_1 + \cdots + a_{qp}x_p)f_q \end{aligned}$$

Remarque 2.1.2 *L'application f est bien définie puisque $\mathcal{B}$ étant une base, tout vecteur x de E s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}$.*

La preuve de cette proposition est évidente. Lorsqu'une application s'écrit de cette façon, il est inutile de revenir à la définition des applications linéaires pour montrer que c'est une application linéaire.

Définition 2.1.4 *Soient f et g deux applications linéaires de E dans F et soit $\lambda \in K$. Alors :*

1. *$f + g$ est une application de E dans F définie par $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$.*
2. *λf est une application de E dans F définie par $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$.*

Proposition 2.1.3 *Soient f et g deux applications linéaires de E dans F et soit $\lambda \in K$. Alors $f + g$ et λf sont des applications linéaires. De plus l'ensemble $\mathcal{L}(E, F)$ des applications linéaires de E dans F muni de ces deux opérations est un espace vectoriel sur K.*

Proposition 2.1.4 *Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie respective n et p. Alors l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E,F)$ est de dimension finie et* $\dim \mathcal{L}(E,F) = np$.

PREUVE: Soit $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de E et $\mathcal{B}' = (f_1, ..., f_p)$ une base de F. Soit $x \in E$. Alors $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j f(e_j) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{p} x_j a_{ij} f_i$$

où $f(e_j) = \sum_{i=1}^{p} a_{ij} f_i$. Pour $1 \leqslant i \leqslant p$ et $1 \leqslant j \leqslant n$ soient ω_{ij} les applications linéaires de E dans F définies par :

$$\omega_{ij}(e_k) = \delta_{jk} f_i$$

pour tout k compris entre 1 et p. Alors on a :

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{p} a_{ij} \omega_{ij}(x)$$

et $f = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{p} a_{ij} \omega_{ij}$. Donc $(\omega_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant p, 1 \leqslant j \leqslant n}$ est une famille génératrice de $\mathcal{L}(E,F)$.

Il reste à montrer que c'est une famille libre. Pour tout i compris entre 1 et p et tout j compris entre 1 et n soient λ_{ij} des scalaires tels que :

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{p} \lambda_{ij} \omega_{ij} = 0$$

Alors :

$$0 = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{p} \lambda_{ij} \omega_{ij}(e_k) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_{ik} f_i$$

comme $(f_1, ..., f_p)$ est une base, il s'ensuit que tous les coefficients λ_{ik} sont nuls pour tout i compris entre 1 et p et k compris entre 1 et n. Donc $(\omega_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant p, 1 \leqslant j \leqslant n}$ est une base qui contient np éléments.

$\square$

Proposition 2.1.5 *Soient E, F et G trois K-espaces vectoriels et $g : E \to F$ et $f : F \to G$ deux applications linéaires. Alors l'application $f \circ g$ est une application linéaire de E dans G.*

Proposition 2.1.6 *Soient E, F et G trois K-espaces vectoriels, $(f,g) \in \mathcal{L}(E,F)^2$ et $(h,k) \in \mathcal{L}(F,G)^2$. Alors :*

1. $h \circ (f+g) = h \circ f + h \circ g$.
2. $(h+k) \circ f = h \circ f + k \circ f$.

Remarque 2.1.3 *Soient E, F et G trois K-espaces vectoriels et $(f,g) \in \mathcal{L}(E,F)^2$. Pour tout scalaire λ on a :*

$$\lambda(f \circ g) = (\lambda f) \circ g = f \circ (\lambda g)$$

Remarque 2.1.4 *Si E, F, G et H sont quatre espaces vectoriels sur K et $f : G \to H$, $g : F \to G$, $h : E \to F$ trois applications linéaires, alors on a évidemment :*

$$f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$$

qui est une propriété générale pour les applications entre ensemble.

Définition 2.1.5 *Soit E un K-espace vectoriel et f un endomorphisme de E. Pour tout entier $n \geqslant 0$, on définit f^n de la façon suivante :*

1. $f^0 = Id_E$.
2. *Pour tout entier* $n \geqslant 1$, $f^n = f \circ f^{n-1}$.

Remarque 2.1.5 *On peut montrer à l'aide d'une récurrence facile que pour tout entier $n \geqslant 1$, $f^n = f^{n-1} \circ f$.*

2.2 Image, Noyau

Soient E et F deux K-espaces vectoriels et $f : E \to F$ une application linéaire.

2.2.1 Image

Proposition 2.2.1 *Soit G un sous-espace vectoriel de E. Alors l'image $f(G)$ de G par f est un sous-espace vectoriel de F.*

PREUVE: On rappelle que $f(G) = \{y \in F / \exists x \in G / y = f(x)\}$. Comme $f(0) = 0$, $0 \in f(G)$. D'autre part, si $y_1, y_2 \in f(G)$, il existe $x_1, x_2 \in G$ tels que $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$. Donc pour tous scalaires λ et μ, on a :

$$\lambda y_1 + \mu y_2 = \lambda f(x_1) + \mu f(x_2) = f(\lambda x_1 + \mu x_2)$$

Donc $\lambda y_1 + \mu y_2 \in f(G)$ et $f(G)$ est un sous-espace vectoriel. □

Proposition 2.2.2 *Si G est un sous-espace vectoriel de E engendré par $(u_1, ..., u_n)$, alors $f(G)$ est engendré par $(f(u_1), ..., f(u_n))$.*

Preuve: Soit H le sous-espace vectoriel de F engendré par $(f(u_1), ..., f(u_n))$. Le but est de montrer que $H = f(G)$.

Montrons d'abord que $H \subset f(G)$. Soit $y \in H$, alors il existe $\lambda_1, ..., \lambda_n$ tels que :

$$y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(u_i)$$

comme f est linéaire $y = f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i\right)$ et on en déduit que $y \in f(G)$. Donc $H \subset f(G)$.

Réciproquement, montrons que $f(G) \subset H$. Si $y \in f(G)$ alors il existe $\lambda_1, ..., \lambda_n$ tels que :

$$y = \sum_{i=1}^{n} f(\lambda_i u_i)$$

et en utilisant à nouveau la linéarité, on a $y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(u_i) \in H$, ce qui achève la démonstration.

□

Définition 2.2.1 *On appelle* **image** *de f le sous-espace vectoriel $f(E)$ de F. On note $f(E) = Im\ f$.*

Proposition 2.2.3 *f est surjective si et seulement si $Im\ f = F$.*

2.2.2 Image réciproque, noyau

Proposition 2.2.4 *Soit H un sous-espace vectoriel de F. Alors l'***image réciproque** *$f^{-1}(H)$ de H par f est un sous-espace vectoriel de E.*

Preuve: Rappelons que $f^{-1}(H) = \{x \in E | f(x) \in H\}$. On a $f(0) = 0 \in H$ car H est un sous-espace vectoriel de F. Donc $0 \in f^{-1}(H)$.

D'autre part soient $x, y \in f^{-1}(H)$ et $\lambda, \mu \in K$. Alors $f(x)$ et $f(y)$ sont dans H. Comme f est linéaire et H est un sous-espace vectoriel, on a :

$$f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y) \in H$$

donc $\lambda x + \mu y \in f^{-1}(H)$ et $f^{-1}(H)$ est un sous-espace vectoriel de E.

□

Remarque 2.2.1 *$\{0\}$ est un sous-espace vectoriel de F. Donc $f^{-1}(\{0\})$ est un sous-espace vectoriel de E.*

Définition 2.2.2 *On appelle* **noyau** *de f le sous-espace vectoriel $f^{-1}(\{0\})$ de E. On note $f^{-1}(\{0\}) = Ker\ f$.*

Proposition 2.2.5 *L'application linéaire f est injective si et seulement si $Ker\ f = \{0\}$.*

PREUVE: Supposons que f est injective. Soit $x \in \text{Ker } f$. Alors $f(x) = 0 = f(0)$. Comme f est injective, on en déduit que $x = 0$.

Réciproquement, supposons que $\text{Ker } f = \{0\}$ et soient $x, y \in E$ tels que $f(x) = f(y)$. Alors $f(x - y) = 0$ et donc $x = y$. Donc f est injective.

□

2.2.3 Théorème du rang

Théorème 2.2.1 *Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Supposons que E est de dimension finie. Alors $Im\ f$ et $Ker\ f$ sont de dimension finie et :*

$$\dim E = \dim Ker\ f + \dim Im\ f$$

PREUVE: On suppose que $\dim E = n$. $\text{Ker } f$ est un sous-espace vectoriel de E. Soit $(e_1, ..., e_p)$ une base de $\text{Ker } f$. On a évidemment $p \leqslant n$. Si $p = n$, alors $\text{Ker } f = E$ et $\text{Im } f = \{0\}$ et la relation est vérifiée. Si $p < n$, par le théorème de la base incomplète, il existe $(e_{p+1}, ..., e_n)$ tels que $(e_1, ..., e_p, e_{p+1}, ..., e_n)$ soit une base de E. E est donc engendré par $(e_1, ..., e_p, e_{p+1}, ..., e_n)$ et d'après la proposition 2.2.2, $f(E) = \text{Im } f$ est engendré par $(f(e_1), ..., f(e_p), f(e_{p+1}), ..., f(e_n))$. Or $f(e_1) = ... = f(e_p) = 0$ donc $\text{Im } f$ est engendré par $(f(e_{p+1}), ..., f(e_n))$.

On va montrer que $(f(e_{p+1}), ..., f(e_n))$ est une famille libre. Soient $\lambda_1, ..., \lambda_{n-p}$ des scalaires tels que :

$$\sum_{i=1}^{n-p} \lambda_i f(e_{p+i}) = 0.$$

La linéarité de f entraîne que $f\left(\sum_{i=1}^{n-p} \lambda_i e_{p+i}\right) = 0$. Donc $\sum_{i=1}^{n-p} \lambda_i e_{p+i} \in \text{Ker } f$ qui est engendré par $(e_1, ..., e_p)$. Donc il existe des scalaires $\mu_1, ..., \mu_p$ tels que :

$$\sum_{i=1}^{n-p} \lambda_i e_{p+i} = \sum_{j=1}^{p} \mu_j e_j.$$

Comme $(e_1, ..., e_p, e_{p+1}, ..., e_n)$ est une base, on en déduit que $\lambda_1 = ... = \lambda_{n-p} = \mu_1, ..., \mu_p = 0$. Donc $(f(e_{p+1}), ..., f(e_n))$ est une base et $\dim \text{Im } f = n - p$.

□

2.3 Isomorphismes

Définition 2.3.1 *Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. Un* **isomorphisme** *de E sur F est une applications linéaire de E dans F qui est bijective.*

Définition 2.3.2 *Si E et F sont deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ tels qu'il existe un isomorphisme de E sur F, on dit que E et F sont* **isomorphes***.*

Si E et F sont deux espaces vectoriels isomorphes, on écrit $E \simeq F$.

Définition 2.3.3 *Soit E un espace vectoriel. Un* **automorphisme** *de E est un isomorphisme de E dans lui-même.*

Proposition 2.3.1 *Si f est un isomorphisme de E sur F, alors la bijection réciproque f^{-1} est une application linéaire de F sur E.*

Preuve: Montrons que f^{-1} est linéaire. Soient $y, y' \in F$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Alors :

$$f(\lambda f^{-1}(y) + \mu f^{-1}(y')) = \lambda f(f^{-1}(y)) + \mu f(f^{-1}(y')) = \lambda y + \mu y'$$

donc $\lambda f^{-1}(y) + \mu f^{-1}(y') = f^{-1}(\lambda y + \mu y')$ et f^{-1} est linéaire.

□

On notera $\mathrm{Isom}(E, F)$ l'ensemble des isomorphismes de E dans F. Si $E = F$, on notera tout simplement $\mathrm{Isom}(E)$ ou $\mathcal{G}\ell(E)$ et on parlera du **groupe linéaire** de E.

Proposition 2.3.2 *Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriel et $f : F \longrightarrow G$ et $g : E \longrightarrow F$ deux isomorphismes. Alors $f \circ g$ est un isomorphisme de E dans G et :*

$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$$

Corollaire 2.3.1 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et f un automorphisme de E. Alors pour tout entier $n \geqslant 1$, f^n est un automorphisme de E et :*

$$(f^n)^{-1} = (f^{-1})^n$$

Proposition 2.3.3 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et f un automorphisme de E. Pour tout entier $n \geqslant 1$, notons $f^{-n} = (f^{-1})^n$. Alors pour tout $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$ on a :*

$$f^{m+n} = f^m \circ f^n$$

Proposition 2.3.4 *Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ et f un isomorphisme de E sur F. Si l'un des deux espaces est de dimension finie, l'autre l'est aussi et on a* $\dim E = \dim F$.

Proposition 2.3.5 *Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ et f un isomorphisme de E sur F. Alors pour toute famille de vecteurs $(u_1, \ldots, u_n)$, on a :*

$$rg\ (u_1, \ldots, u_n) = rg\ (f(u_1), \ldots, f(u_n))$$

En particulier si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E, alors $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est une base de F.

Proposition 2.3.6 *Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ de* **même dimension finie** *et soit $f : E \to F$ une application linéaire. Alors les trois propositions suivantes sont équivalentes :*

1. *f est un isomorphisme.*
2. *f est injective.*
3. *f est surjective.*

Preuve: Si f est un isomorphisme alors f est bijective donc injective. Donc 1 implique 2.

D'autre part le théorème du rang nous dit que $\dim E = \dim \mathrm{Ker}\ f + \dim \mathrm{Im}\ f$. Donc si f est injective, alors $\mathrm{Ker}\ f = \{0\}$ et $\dim \mathrm{Ker}\ f = 0$, et on déduit du théorème du rang que $\dim \mathrm{Im}\ f = \dim E = \dim F$. Donc $\mathrm{Im}\ f = F$ et f est surjective ce qui montre que 2 implique 3.

Enfin si f est surjective, en appliquant à nouveau le théorème du rang, on déduit que $\mathrm{Ker}\ f = \{0\}$. Donc f est injective donc bijective ce qui montre que 3 implique 1.

□

Théorème 2.3.1 *Tout espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$ de dimension finie n est isomorphe à l'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$.*

Preuve: Soit $(e_1, ..., e_n)$ une base de E. Considérons l'application :

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{K}^n & \longrightarrow & E \\ & (x_1, ..., x_n) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i \end{array}$$

Il n'est pas difficile de voir que f est un application linéaire surjective puisque tout x de E est combinaison linéaire de $e_1, \ldots, e_n$. Comme $\dim E = \dim \mathbb{K}^n = n$, f est un isomorphisme.

□

2.4 Rang d'une application linéaire

Définition 2.4.1 *Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie sur $\mathbb{K}$ et soit $f : E \to F$ une application linéaire. On appelle* **rang de l'application linéaire** f *et on note rg (f) la dimension de l'image de f.*

Proposition 2.4.1 *Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie sur $\mathbb{K}$ et soit $f : E \to F$ une application linéaire. Si $(e_1, ..., e_n)$ est une base de E alors le rang de f n'est rien d'autre que le rang de la famille de vecteurs $(f(e_1), ..., f(e_n))$.*

Preuve: D'après la proposition 2.2.2, l'image de f qui n'est rien d'autre que l'image de E par f est engendrée par $(f(e_1), ..., f(e_n))$ puisque $(e_1, ..., e_n)$ est une famille génératrice de E. Il s'ensuit que :

$$\text{rg } (f) = \text{rg } (f(e_1), ..., f(e_n))$$

□

Proposition 2.4.2 *Soient E, F, G trois espaces vectoriels de dimension finie sur un corps $\mathbb{K}$. Soient $g : E \to F$ et $f : F \to G$ deux applications linéaires. Alors :*

1. *Si g est un isomorphisme, rg $(f \circ g) =$ rg (f).*
2. *Si f est un isomorphisme, rg $(f \circ g) =$ rg (g).*

Preuve:

1. Supposons que g est un isomorphisme. Montrons d'abord que $\text{Im } (f \circ g) \subset \text{Im } f$. Soit $y \in \text{Im } (f \circ g)$, alors il existe $x \in E$ tel que $y = f(g(x))$. Donc $y \in \text{Im } f$ ce qui prouve que $\text{Im } (f \circ g) \subset \text{Im } f$.
   Réciproquement, montrons que $\text{Im } f \subset \text{Im } (f \circ g)$. Soit $y \in \text{Im } f$, alors il existe $z \in F$ tel que $y = f(z)$. Mais puisque g est un isomorphisme, il existe $x \in E$ tel que $z = g(x)$ et $y = (f \circ g)(x)$. Donc $y \in \text{Im } (f \circ g)$ ce qui prouve que $\text{Im } f \subset \text{Im } (f \circ g)$.
   On a finalement montré que $\text{Im } (f \circ g) = \text{Im } f$, et on en déduit que $\text{rg } (f \circ g) = \text{rg } (f)$.
2. Supposons maintenant que f est un isomorphisme. Nous allons montrer que $\text{Ker } g = \text{Ker } (f \circ g)$. Si $x \in \text{Ker } g$ alors $g(x) = 0$ et $f(g(x)) = 0$. Donc $x \in \text{Ker } (f \circ g)$, et on a montré que $\text{Ker } g \subset \text{Ker } (f \circ g)$.
   Réciproquement, si $x \in \text{Ker } (f \circ g)$, alors $f(g(x)) = 0$. Mais comme f est un isomorphisme, $g(x) = 0$, d'où $x \in \text{Ker } g$, ce qui montre que $\text{Ker } (f \circ g) \subset \text{Ker } g$.
   On a donc montré que $\text{Ker } g = \text{Ker } (f \circ g)$. Or d'après le théorème du rang, on a :

$$\begin{aligned}\dim E &= \dim \text{Im } g + \dim \text{Ker } g \\ &= \dim \text{Im } (f \circ g) + \dim \text{Ker } (f \circ g)\end{aligned}$$

   Ceci permet de déduire que $\text{rg } (f \circ g) = \text{rg } (g)$.

□

2.5 Projecteurs

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E : $E = F \oplus G$. Pour tout x de E il existe un unique couple $(p(x), q(x)) \in F \times G$ tel que $x = p(x) + q(x)$.

Proposition 2.5.1 *Les applications p et q sont des endomorphismes de E. p s'appelle le* **projecteur** *sur F* **parallèlement** *à G et q s'appelle le* **projecteur** *sur G* **parallèlement** *à F.*

Preuve: Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ et $(x, y) \in E^2$. Alors :

$$\begin{aligned} \lambda x + \mu y &= p(\lambda x + \mu y) + q(\lambda x + \mu y) \\ &= \lambda(p(x) + q(x)) + \mu(p(y) + q(y)) \\ &= (\lambda p(x) + \mu p(y)) + (\lambda q(x) + \mu q(y)) \end{aligned}$$

Or $(\lambda p(x) + \mu p(y), \lambda q(x) + \mu q(y)) \in F \times G$, donc par unicité de la décomposition :

$$p(\lambda x + \mu y) = \lambda p(x) + \mu p(y) \quad \text{et} \quad q(\lambda x + \mu y) = \lambda q(x) + \mu q(y)$$

□

Proposition 2.5.2 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*

1. *Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E supplémentaires dans E et p le projecteur sur F parallèlement à G. Alors on a : $p \circ p = p$, Im $(p) = F$ et Ker $(p) = G$.*

   De plus si q est le projecteur sur G parallèlement à F, alors $p \circ q = q \circ p = 0$.

2. *Réciproquement, soit $p \in \mathcal{L}(E)$ tel que $p \circ p = p$. Alors Im (p) et Ker (p) sont deux sous-espaces vectoriels de E supplémentaires dans E et p est le projecteur sur Im (p) parallèlement à Ker (p).*

Preuve: Prouvons d'abord le point 1). Soit $x \in E$. Alors $p(x) = p(x) + 0$ et $(p(x), 0) \in F \times G$. Donc par unicité de la décomposition $p(p(x)) = p(x)$ et $p \circ p = p$.

Déterminons Im (p). Comme pour tout $x \in E$, $p(x) \in F$, il est évident que Im $(p) \subset F$. D'autre part pour tout x dans F, on a $x = x + 0$ et $(x, 0) \in F \times G$. Donc $x = p(x) \in$ Im (p). Ainsi Im $(p) = F$.

Déterminons Ker (p). Pour tout x de G, $x = 0 + x$ et $(0, x) \in F \times G$, donc $p(x) = 0$, d'où $G \subset$ Ker (p). Réciproquement soit $x \in G$, alors $x = p(x) + q(x) = 0 + x$ et par unicité de la décomposition $p(x) = 0$. Donc Ker $(p) \subset G$. Ainsi Ker $(p) = G$.

Montrons maintenant le point 2). Soit $x \in \text{Ker }(p) \cap \text{Im }(p)$. Alors $p(x) = 0$ et il existe $y \in E$ tel que $p(y) = x$. D'où :

$$0 = p(x) = p(p(y)) = (p \circ p)(y) = p(y) = x$$

Ceci montre que $\text{Im }(p) \cap \text{Ker }(p) = \{0\}$ et donc Im (p) et Ker (p) sont en somme directe. Soit $x \in E$. Alors $x = p(x) + (x - p(x))$. Or $p(x - p(x)) = p(x) - (p \circ p)(x) = 0$. Donc $x - p(x) \in \text{Ker }(p)$. Ceci montre que $E = \text{Im }(p) + \text{Ker }(p)$. Nous avons donc montré que Im (p) et Ker (p) sont supplémentaires dans E.

Puisque pour tout $x \in E$, $x = p(x)+(x-p(x))$ avec $p(x) \in \text{Im }(p)$ et $x-p(x) \in \text{Ker }(p)$, p est le projecteur sur Im (p) parallèlement à Ker (p).

□

Remarque 2.5.1 *L'application linéaire q définie par $q(x) = x - p(x)$ est le projecteur sur Ker (p) parallèlement à Im (p).*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $F_1, \ldots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de E tels que $E = \bigoplus_{i=1}^{n} F_i$. Alors pour tout $x \in E$, il existe un unique n-uplet $(p_1(x), \ldots, p_n(x)) \in F_1 \times \ldots \times F_n$ tel que : $x = \sum_{i=1}^{n} x_i$.

Proposition 2.5.3 *Les applications p_i sont des applications linéaires et $(p_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ s'appelle* **famille de projecteurs** *de E associée à la décomposition $E = \bigoplus_{i=1}^{n} F_i$.*

Proposition 2.5.4 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*

1. *Soit $(p_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille de projecteurs de E associée à la décomposition $E = \bigoplus_{i=1}^{n} F_i$. Alors : pour tout $(i, j) \in \{1, \ldots, n\}^2$:*
   — *(i) $p_i \circ p_i = p_i$.*
   — *(ii) $p_i \circ p_j = 0$ si $i \neq j$.*
   — *(iii) $Id_E = \sum_{i=1}^{n} p_i$.*
   De plus Im $(p_i) = F_i$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$.
2. *Réciproquement soit $(p_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille d'endomorphismes de E vérifiant les propriétés (i), (ii) et (iii). Alors $E = \bigoplus_{i=1}^{n} \text{Im }(p_i)$ et $(p_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est la famille de projecteurs associés à cette décomposition.*

2.6 Exercices

28. On note $\mathbb{C}^\infty(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des applications indéfiniment dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On définit une application Φ de $\mathbb{C}\infty(\mathbb{R})$ dans lui-même en posant $\Phi(f) = g$. L'application Φ est-elle linéaire dans les cas suivants ?

$$a)\ \ g(x) = \int_0^{x^n} f(t)\,dt, \quad b)\ \ g(x) = f''(x^n), \quad c)\ \ g(x) = \left(\int_0^x f(t)\,dt\right) f'(x)$$

29. a) Montrer que l'application Φ de $\mathbb{R}_n[X]$ dans lui-même qui à P associe le polynôme Q défini par

$$Q(X) = P(X+1) + P(X-1) - 2P(X)\ ,$$

est linéaire.

b) Trouver son noyau et son image.

30. a) Montrer que l'application Φ_k de $\mathbb{R}_n[x]$ dans lui-même qui à P associe le polynôme Q défini par

$$Q(x) = P'(x) - (k+2)x^k \int_0^1 P(t)\,dt\ ,$$

où $0 \leqslant k \leqslant n$, est linéaire.

b) Trouver son noyau et son image.

31. On considère ci-dessous des applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$. Déterminer dans chaque cas une base de l'image de f, le rang de f, une base du noyau de f, ainsi qu'un système d'équations de Im f.

$$f(x,y,z,t) = (2x+y+3t, -x+3y+4z+2t, x+4y+4z+5t, 7y+8z+7t)$$

$$f(x,y,z,t,u) = (x-y-z, 2y+z+2t+3u, 2x+2y+t+3u, x+y+t+2u)$$

$$f(x,y,z) = (y,z,0)$$

32. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3. Soit f une application linéaire non nulle de E dans E telle que $f \circ f = 0$.

1) Montrer que Im $f \subset$ Ker f. En déduire la valeur du rang de f.

2) Soit $e_1 \in E$ tel que $f(e_1) \neq 0$. On pose $e_2 = f(e_1)$. Montrer qu'il existe $e_3 \in \text{Ker } f$ non colinéaire à e_2. Montrer que (e_1, e_2, e_3) est une base de E.

33. Soit E un espace vectoriel et f et g deux endomorphismes de E telles que $f \circ g = g \circ f$. Montrer que Ker (f) et Im (f) sont stables par g.

34. Soient E, F, G trois espaces vectoriels sur K ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications linéaires.

1) Montrer que l'on a $g \circ f = 0$ si et seulement si Im $f \subset$ Ker g.

2) Montrer que Ker $(g \circ f) = f^{-1}(\text{Ker } (g))$ et Ker $(g \circ f) \supset$ Ker (f).

3) Montrer que Im $(g \circ f) = g(\text{Im } (f))$ et Im $(g \circ f) \subset$ Im (g).

35. Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E.

a) Montrer que Ker $g \subset$ Ker $(f \circ g)$.

b) Montrer que Ker $g =$ Ker $(f \circ g)$ si et seulement si Im g et Ker f sont en somme directe.

c) Soit φ un endomorphisme de E. On suppose que Im φ et Ker φ sont en somme directe.

(i) Montrer que si $n \geqslant 1$, on a Ker $\varphi^n =$ Ker φ.

(ii) Montrer que si E est de dimension finie Im $(\varphi^n) =$ Im φ.

(iii) Montrer que ce résultat peut être faux en dimension infinie. (Dans $\mathbb{R}[X]$ considérer l'application qui à $P \longmapsto XP$).

(iv) Montrer cependant que Im φ et Im (φ^n) sont isomorphes.

36. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et soient f et g deux endomorphismes de E. Soit Φ l'application linéaire de Im g dans Im f définie par $\Phi(x) = f(x)$. Montrer que Ker $\Phi =$ Ker $f \cap$ Im g et que Im $\Phi =$ Im $(f \circ g)$. En déduire que

$$\text{rg } (g) = \text{rg } (f \circ g) + \dim(\text{Ker } f \cap \text{Im } g)\ .$$

37. Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E. On considère les deux conditions suivantes :

(i) $\forall x \in E \ \ , \ \ \exists n \in \mathbb{N} \ \ | \ \ f^n(x) = 0$.

(ii) $\exists n \in \mathbb{N} \ \ | \ \ \forall x \in E \ \ , \ \ f^n(x) = 0$ (On dit alors que f est nilpotent).

a) Montrer que si E est de dimension finie, les deux conditions sont équivalentes.

b) Montrer que ce n'est plus vrai si $E = \mathbb{R}[x]$.

c) On suppose que f vérifie la condition (ii) et que n est le plus petit entier pour lequel la condition (ii) est vérifiée. Montrer que $(\text{Id}_E, f, \cdots, f^{n-1})$ est libre.

38. Soit E un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$ et f un endomorphisme de E tel que $f \circ f = \mathrm{Id}_E$.

a) Montrer que $E = \mathrm{Im}\ (f - Id_E) \bigoplus \mathrm{Im}\ (f + Id_E)$.

b) Montrer que $\mathrm{Im}\ (f - Id_E) = \mathrm{Ker}\ (f + Id_E)$ et $\mathrm{Im}\ (f + Id_E) = \mathrm{Ker}\ (f - Id_E)$.

39. Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension fini tels que $f \circ g = 0$, et $f + g$ est inversible. Montrer que $\mathrm{Ker}\ f$ et $\mathrm{Ker}\ g$ sont supplémentaires.

40. Soient E et H deux espaces vectoriels. Soient F et G deux sous-espaces supplémentaires de H. Soient f une application linéaire de E dans F et g une application linéaire de E dans G. On pose

$$\Phi(x) = f(x) + g(x) \ .$$

a) Montrer que Φ est une application linéaire de E dans H.

b) Montrer que $\mathrm{Ker}\ \Phi = \mathrm{Ker}\ f \cap \mathrm{Ker}\ g$.

c) Montrer que si Φ est surjective, alors f et g le sont aussi.

d) Donner un exemple où f et g sont surjectives et Φ ne l'est pas.

41. Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur un corps K et F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

1) Soit

$$\begin{array}{cccc} \varphi & : & F \times G & \longrightarrow & E \\ & & (x, y) & \longmapsto & x - y \end{array}$$

Montrer que φ est une application linéaire.

2) Soit

$$\begin{array}{cccc} \psi & : & F \cap G & \longrightarrow & F \times G \\ & & x & \longmapsto & (x, x) \end{array}$$

Montrer que ψ est une application linéaire.

3) Montrer que $\mathrm{Im}\ \psi \subset \mathrm{Ker}\ \varphi$ puis que ψ est un isomorphisme de $F \cap G$ dans $\mathrm{Ker}\ \varphi$.

4) En appliquant le théorème du rang à φ, retrouver la formule de Grassmann.

42. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(p, q) \in \mathcal{L}(E)^2$ deux projecteurs.

1) Montrer que $p + q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$.

2) Montrer que si $p + q$ est un projecteur

$$\mathrm{Im}\ (p + q) = \mathrm{Im}\ (p) \oplus \mathrm{Im}\ (q) \ \text{ et } \ \mathrm{Ker}\ (p + q) = \mathrm{Ker}\ (p) \cap \mathrm{Ker}\ (q)$$

43. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels tels que $E = F \oplus G$. On appelle symétrie par rapport à F parallèlement à G l'application linéaire $s = 2p - \mathrm{Id}_E$ où p est le projecteur sur F parallèlement à G.

Montrer qu'un endomorphisme s est une symétrie si et seulement si $s \circ s = \mathrm{Id}_E$.

44. Soit E un espace vectoriel et f et g deux projecteurs de E. Montrer que si $f \circ g = g \circ f$ et $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Ker}\, g$ alors $f = g$.

Chapitre 3

CALCUL MATRICIEL

3.1 Définition et généralités

Définition 3.1.1 *Soient K un corps ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), p et q deux entiers superieurs ou égaux à* 1. *Une* **matrice** *A est une application de $\{1, ..., p\} \times \{1, ..., q\}$ dans K :*

$$\begin{array}{rccc} A & : & \{1, ..., p\} \times \{1, ..., q\} & \longrightarrow & K \\ & & (i, j) & \longmapsto & A(i, j) = a_{ij} \end{array}$$

Les coefficients a_{ij} s'appellent les **coefficients de la matrice** A. Dans la pratique, on représentera toujours A par un tableau :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots\cdots & a_{pq} \end{pmatrix}}_{q \text{ colonnes}} \left.\vphantom{\begin{pmatrix} a \\ a \\ \vdots \\ a \end{pmatrix}}\right\} p \text{ lignes}$$

a_{ij} est le coefficient de la i-ième ligne et de la j-ième colonne. On notera encore $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant q}}$ et on dira que A est une matrice (p, q) à coefficients dans K.

(p, q) s'appelle la **taille** de la matrice.

L'ensemble des matrices (p, q) à coefficients dans K sera noté $\mathcal{M}(p, q, K)$.

Remarque 3.1.1 *Deux matrices sont égales si et seulement si elles ont même taille et leurs coefficients sont égaux.*

Exemple: La matrice $A = (ij + 1)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant 3 \\ 1 \leqslant j \leqslant 3}}$ est la matrice $(3, 3)$ suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 7 & 10 \end{pmatrix}$$

Définition 3.1.2 *Soit $A \in \mathcal{M}(p,q,\mathbb{K})$. On appelle* **diagonale principale** *de A, l'ensemble de tous les coefficients a_{ii} pour $i \leqslant \min(p,q)$.*

Définition 3.1.3 *On dit qu'une matrice (p,q) est une* **matrice carrée** *si $p = q$.*

L'espace des matrices carrées à p lignes et p colonnes à coefficients dans K sera noté $\mathcal{M}(p,K)$.

Définition 3.1.4
1. *On appelle* **matrice ligne** *toute matrice de $\mathcal{M}(1,q,K)$. Si $A \in \mathcal{M}(1,q,K)$ alors $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1q} \end{pmatrix}$.*
2. *On appelle* **matrice colonne** *toute matrice de $\mathcal{M}(p,1,K)$. Si $A \in \mathcal{M}(p,1,K)$ alors $A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{p1} \end{pmatrix}$.*

Définition 3.1.5 *La* **matrice nulle** *de $\mathcal{M}(p,q,\mathbb{K})$ est la matrice $O_{(p,q)}$ (ou O s'il n'y a pas de confusion possible) dont tous les coefficients sont nuls.*

Définition 3.1.6 *La matrice* **identité** *I_p est la matrice de $\mathcal{M}(p,\mathbb{K})$ (ou I s'il n'y a pas de confusion possible) qui n'a que des 1 sur la diagonale principale et des 0 partout ailleurs.*

Autrement dit

$$I_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.2 Opérations sur les matrices

3.2.1 Multiplication par un scalaire et somme de deux matrices

Définition 3.2.1 *Soit $\lambda \in K$ et $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}(p,q,\mathbb{K})$. Alors λA est une matrice de $\mathcal{M}(p,q,\mathbb{K})$ définie par $\lambda A = (\lambda a_{ij})$.*

Exemple:

$$\lambda \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda & 3\lambda & -\lambda \\ 4\lambda & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Remarque 3.2.1 *On a évidemment* $1A = A$.

Définition 3.2.2 *Soient* $A = (a_{ij})$ *et* $B = (b_{ij})$ *deux matrices de* $\mathcal{M}(p, q, \mathbb{K})$. *Alors la somme* $A + B$ *est la matrice de* $\mathcal{M}(p, q, \mathbb{K})$ *définie par :*

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})$$

Remarque 3.2.2 *On ne peut évidemment additionner que des matrices de même taille !*

Exemple:

$$\begin{pmatrix} 1 & -10 & 6 \\ 9 & 4 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & 7 & 0 \\ -9 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -3 & 6 \\ 0 & 6 & 10 \end{pmatrix}$$

Théorème 3.2.1 *L'ensemble* $\mathcal{M}(p, q, \mathbb{K})$ *muni de l'addition des matrices et de la multiplication des matrices par un scalaire est un espace vectoriel sur* K *de dimension* pq.

Remarque 3.2.3 *L'élément neutre est la matrice nulle* $O_{(p,q)}$ *de* $\mathcal{M}(p, q, \mathbb{K})$. *L'opposé d'une matrice* A *est noté* $-A$ *et on a évidemment* $-A = (-1_K)A$.

Preuve du théorème 3.2.1: On vérifie facilement que l'addition des matrices et la multiplication des matrices par un scalaire vérifient les axiomes des espaces vectoriels.

Soient maintenant $E^{(i,j)}_{(p,q)}$ les matrices de $\mathcal{M}(p, q, \mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui de la i-ième ligne et de la j-ième colonne qui est égal à 1. Autrement dit :

$$E^{(i,j)}_{(p,q)} = \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & & 0 & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & 0 & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \longleftarrow i-\text{ième ligne} \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \\ \uparrow & \\ j-\text{ième colonne} & \end{array}$$

Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots\cdots & a_{pq} \end{pmatrix}$, alors $A = \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant p \\ 1\leqslant j\leqslant q}} a_{ij} E_{(p,q)}^{(i,j)}$.

Donc l'ensemble des matrices $E_{(p,q)}^{(i,j)}$ est une famille génératrice. C'est de plus une famille libre car $\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant p \\ 1\leqslant j\leqslant q}} a_{ij} E_{(p,q)}^{(i,j)} = 0$ si et seulement si la matrice (a_{ij}) est nulle, c'est-à-dire si et seulement si les coefficients a_{ij} sont tous nuls. Donc les pq matrices $E_{(p,q)}^{(i,j)}$ forment une base de $\mathcal{M}(p,q,\mathbb{K})$.

□

3.2.2 Produit de deux matrices

Définition 3.2.3 *Soient $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}(p,\mathbf{q},\mathbb{K})$ et $B = (b_{jk}) \in \mathcal{M}(\mathbf{q},r,\mathbb{K})$. Alors le produit AB est une matrice de $\mathcal{M}(p,r,\mathbb{K})$ dont les coefficients $(c_{ik})_{1\leqslant i\leqslant p, 1\leqslant k\leqslant r}$ vérifient :*

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{q} a_{ij} b_{jk}$$

Remarque 3.2.4 Attention ! *On ne peut faire le produit de A par B que si* **le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B**.

Exemple:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 4 & -2 & 6 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 4 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & -2 \\ -24 & -5 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

Remarque 3.2.5 *Soient $A \in \mathcal{M}(p,q,\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}(q,r,\mathbb{K})$. Si on peut effectuer le produit AB, on ne peut pas forcément faire le produit BA. Il faudrait pour cela que $r = p$.*

Si c'est le cas, on n'a pas forcément $AB = BA$.

Exemple:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 19 & 6 \end{pmatrix}$$

mais

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 9 & 2 \\ 5 & 0 & -5 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

De même,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 9 & -10 \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -9 & -10 \end{pmatrix}$$

3.2.3 Propriétés du produit

Proposition 3.2.1

1. *$\forall A \in \mathcal{M}(p,q,\mathbb{K})$ alors $O_{(r,p)}A = O_{(r,q)}$ et $AO_{(q,r)} = O_{(p,r)}$.*
2. *$\forall A \in \mathcal{M}(p,q,\mathbb{K})$ alors $I_pA = AI_q = A$.*
3. *$\forall A \in \mathcal{M}(p,q,\mathbb{K})$, $\forall B \in \mathcal{M}(q,r,\mathbb{K})$, $\forall \lambda \in K$, alors $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$.*
4. *Le produit est distributif à droite et à gauche par rapport à l'addition :*
   - *$\forall A$, $B \in \mathcal{M}(p,q,\mathbb{K})$, $\forall C \in \mathcal{M}(q,r,\mathbb{K})$, alors $(A+B)C = AC + BC$.*
   - *$\forall A \in \mathcal{M}(p,q,\mathbb{K})$, $\forall B$, $C \in \mathcal{M}(q,r,\mathbb{K})$, alors $A(B+C) = AB + AC$.*

Théorème 3.2.2 *La multiplication des matrices est associative : pour toutes matrices $A \in \mathcal{M}(p,q,\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}(q,r,\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}(r,s,\mathbb{K})$, on a :*

$$(AB)C = A(BC)$$

PREUVE: Posons $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant q}}$, $B = (b_{jk})_{\substack{1 \leqslant j \leqslant q \\ 1 \leqslant k \leqslant r}}$ et $C = (c_{kl})_{\substack{1 \leqslant k \leqslant r \\ 1 \leqslant l \leqslant s}}$. Posons maintenant :

$$AB = (\alpha_{ik})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant k \leqslant r}} \in \mathcal{M}(p,r,\mathbb{K}) \quad \text{et} \quad BC = (\beta_{jl})_{\substack{1 \leqslant j \leqslant q \\ 1 \leqslant l \leqslant s}} \in \mathcal{M}(q,s,\mathbb{K})$$

On va montrer que les matrices $(m_{il})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant l \leqslant s}} = (AB)C$ et $(n_{il})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant l \leqslant s}} = A(BC)$ sont égales.

On a :

$$\begin{aligned} m_{il} &= \sum_{k=1}^{r} \alpha_{ik} c_{kl} = \sum_{k=1}^{r} \left(\sum_{j=1}^{q} a_{ij} b_{jk} \right) c_{kl} \\ &= \sum_{k=1}^{r} \sum_{j=1}^{q} (a_{ij} b_{jk} c_{kl}) = \sum_{j=1}^{q} \sum_{k=1}^{r} (a_{ij} b_{jk} c_{kl}) \\ &= \sum_{j=1}^{q} a_{ij} \left(\sum_{k=1}^{r} b_{jk} c_{kl} \right) = \sum_{j=1}^{q} a_{ij} \beta_{jl} \\ &= n_{il} \end{aligned}$$

On a donc montré que $m_{il} = n_{il}$ pour tout i compris entre 1 et p et l compris entre 1 et s. Donc $(AB)C = A(BC)$. □

Remarque 3.2.6 *On verra au chapitre 4 que l'interprétation du produit matriciel comme composition d'applications linéaires permet de retrouver ce résultat sans calculs du fait de l'associativité de la composition des applications (linéaires ou non).*

3.3 Matrices carrées et inverses

On rappelle que $\mathcal{M}(p, \mathbb{K})$ désigne l'espace vectoriel des matrices carrées à p lignes et p colonnes.

Toutes les opérations définies jusqu'ici sont des **opérations internes** :

1. $\forall \lambda \in K$, $\forall A \in \mathcal{M}(p, \mathbb{K})$, $\lambda A \in \mathcal{M}(p, \mathbb{K})$.
2. $\forall A$, $B \in \mathcal{M}(p, \mathbb{K})$, $A + B \in \mathcal{M}(p, \mathbb{K})$.
3. $\forall A$, $B \in \mathcal{M}(p, \mathbb{K})$, $AB \in \mathcal{M}(p, \mathbb{K})$.

Définition 3.3.1 *On définit pour tout $m \geqslant 1$ et pour toute matrice A de $\mathcal{M}(p, \mathbb{K})$, A^m de la façon suivante :*

$$A^1 = A, \quad \text{et} \quad \forall m \geqslant 1, \quad A^{m+1} = A^m A$$

Par convention $A^0 = I_p$.

Remarque 3.3.1 *Si m et n sont deux entiers positifs ou nuls, $A^{m+n} = A^m A^n$.*

Définition 3.3.2 *Soit $A \in \mathcal{M}(p, \mathbb{K})$. On dit que la matrice A est* **inversible** *s'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}(p, \mathbb{K})$ telle que $AB = I_p = BA$.*

Proposition 3.3.1 *Si $A \in \mathcal{M}(p, \mathbb{K})$ est inversible alors il n'existe qu'une seule matrice B vérifiant $AB = I_p = BA$. Cette matrice s'appelle l'***inverse** *de A et est notée A^{-1}.*

Preuve: Soient B et C deux matrices de $\mathcal{M}(p, \mathbb{K})$ telles que $AB = I_p = BA$ et $AC = I_p = CA$.

Montrons que $B = C$.

$$B = BI_p = B(AC) = (BA)C = I_pC = C$$

□

Proposition 3.3.2 *Soient E et F deux K-espaces vectoriels de même dimension finie. Alors les trois propositions suivantes sont équivalentes :*

1. *Il existe $g \in \mathcal{L}(F, E)$ tel que $g \circ f = Id_E$.*

2. *Il existe $h \in \mathcal{L}(E, F)$ tel que $f \circ h = Id_F$.*
3. *f est un isomorphisme.*

PREUVE: Montrons que $1 \Longrightarrow 2$: il existe $g \in \mathcal{L}(F, E)$ tel que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$. Soit $x \in \mathrm{Ker}\ (f)$ alors $g(f(x)) = g(0) = 0 = x$. Donc f est injective et comme E et F sont de même dimension finie f est un isomorphisme et donc 2 est vérifié.

Montrons que $2 \Longrightarrow 3$: il existe $h \in \mathcal{L}(E, F)$ tel que $f \circ h = \mathrm{Id}_F$. Si $y \in F$, alors $f(h(y)) = y$. Donc y a un antécédent et f est surjective et comme E et F sont de même dimension finie f est un isomorphisme ce qui prouve 1.

L'implication $3 \Longrightarrow 1$ est évidente. □

Comme corollaire on a

Corollaire 3.3.1 *Soit $A \in \mathcal{M}(p, \mathbb{K})$. Alors les trois propositions suivantes sont équivalentes :*

1. *A est* **inversible à gauche** *; c'est-à-dire qu'il existe $B \in \mathcal{M}(p, \mathbb{K})$ telle que $BA = I_p$.*
2. *A est* **inversible à droite** *; c'est-à-dire qu'il existe $C \in \mathcal{M}(p, \mathbb{K})$ telle que $AC = I_p$.*
3. *A est inversible.*

PREUVE: Soit $E = \mathcal{M}(p, 1, \mathbb{K})$. Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}(p, \mathbb{K})$, considérons l'application :

$$f_A \quad : \quad \begin{array}{ccc} E & \rightarrow & E \\ X & \mapsto & AX \end{array}$$

On montre facilement que f_A est un endomorphisme de E.

Montrons que $1 \Longrightarrow 2$: il existe $B \in \mathcal{M}(p, \mathbb{K})$ telle que $BA = I_p$. Donc $f_B \circ f_A = \mathrm{Id}_E$. D'après la proposition 3.3.2 f_A est un isomorphisme. Donc $f_A^{-1} = f_B$ et $f_A(f_B(X)) = ABX = X$ pour tout $X \in E$. En particulier si :

$$X = E_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow \text{ième place} \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$ABE_i = C_i$ où C_i est la ième colonne de AB. Mais comme $ABE_i = E_i$ cela signifie que $C_i = E_i$. Donc $AB = I_p$ et A est inversible. Ce qui prouve 2 (mais aussi 3)

On prouve de la même manière que $2 \Longrightarrow 3$. L'implication $3 \Longrightarrow 1$ est évidente.

□

Remarque 3.3.2 *Cette proposition nous dit que si A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}(p, \mathbb{K})$ telles que $AB = I_p$, alors A est inversible et $A^{-1} = B$. Il est donc* **inutile** *de montrer que $BA = I_p$. Car si $AB = I_p$, on a nécessairement $BA = I_p$.*

Proposition 3.3.3 *Soient A et B deux matrices inversibles de $\mathcal{M}(p, \mathbb{K})$. Alors AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.*

Preuve: En utilisant l'associativité de la multiplication, on a :

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = I_p$$

de même $(B^{-1}A^{-1})(AB) = I_p$. On en conclut que AB est inversible et que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

□

Définition 3.3.3 *Pour toute matrice inversible de $\mathcal{M}(p, \mathbb{K})$ et tout entier $m \geqslant 1$, on pose $A^{-m} = (A^{-1})^m$.*

Remarque 3.3.3 *Pour tout m, $n \in \mathbb{Z}$, si $A \in \mathcal{M}(p, \mathbb{K})$ est inversible, on a :*

$$A^{m+n} = A^m A^n$$

Définition 3.3.4 *L'ensemble de toutes les matrices inversibles de $\mathcal{M}(p, \mathbb{K})$ s'appelle le* **groupe linéaire** *des matrices carrées (p, p) et est noté $GL(p, \mathbb{K})$.*

Remarque 3.3.4 *Plus généralement, tout ensemble G muni d'une multiplication $\bullet$ qui est associative, qui admet un élément neutre e (i.e. $e \bullet x = x \bullet e = x$ pour tout $x \in G$) et telle que tout élément admet un inverse (i.e. pour tout $x \in G$, il existe $y \in G$ tel que $xy = e = yx$) s'appelle un groupe.*

Muni de la multiplication des matrices, $GL(p, \mathbb{K})$ est un groupe. En effet, la proposition 3.3.3 nous dit que la multiplication est une opération interne puisque le produit de deux matrices inversibles est encore une matrice inversible. De plus, elle est associative, elle admet un élément neutre qui est I_p et toute matrice admet un inverse (par définition de $GL(p, \mathbb{K})$).

Définition 3.3.5 *Une matrice carrée A de $\mathcal{M}(p, \mathbb{K})$ est* **diagonale** *si tous ses éléments hors de la diagonale principale sont nuls.*

Autrement dit :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_p \end{pmatrix}$$

Proposition 3.3.4 *Soient* $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_p \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mu_p \end{pmatrix}$. *Alors* AB *est diagonale et* $AB = BA = \begin{pmatrix} \lambda_1\mu_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_p\mu_p \end{pmatrix}$.

Proposition 3.3.5 *La matrice diagonale* $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_p \end{pmatrix}$ *est inversible si et seulement si tous les coefficients* $\lambda_1,\ldots,\lambda_p$ *sont non nuls.*

Si A *est inversible alors on a :*

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{\lambda_p} \end{pmatrix}$$

PREUVE: Supposons que A est inversible. Montrons alors que tous les coefficients $\lambda_1,\ldots,\lambda_p$ sont non nuls. Pour cela supposons le contraire, c'est-à-dire qu'il existe un coefficient λ_i nul. Considérons alors la matrice colonne E_i définie dans la preuve de la proposition 5.4.3. Un calcul rapide montre que $AE_i = 0$. Puisqu'on a supposé que A est inversible, en multipliant à gauche par A^{-1} on obtient $E_i = 0$ ce qui constitue une contradiction. Donc tous les λ_i sont non nuls.

Réciproquement, si tous les λ_i sont non nuls, en considérant la matrice

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{\lambda_p} \end{pmatrix}$$

il n'est pas difficile de voir que $AB = I_p$, ce qui achève la démonstration.

□

Définition 3.3.6 *Une matrice carrée de* $\mathcal{M}(p,\mathbb{K})$ *est* **triangulaire supérieure** *(resp.* **triangulaire inférieure***) si tous ses éléments au-dessous (resp. au-dessus) de la diagonale principale sont nuls.*

De plus, elle sera dite **triangulaire supérieure stricte** *(resp.* **triangulaire inférieure stricte** *si elle est triangulaire supérieure (resp.* **triangulaire inférieure** *) et si les éléments de sa diagonale sont nuls.*

Exemples: $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ est triangulaire supérieure, $\begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ est triangulaire supérieure stricte.

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ est triangulaire inférieure et $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est triangulaire inférieure stricte.

Remarque 3.3.5 *Soit $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant p}$ une matrice carrée. Alors A est triangulaire supérieure si et seulement si $a_{ij} = 0$ dès que $i > j$ et A est triangulaire supérieure stricte si et seulement si $a_{ij} = 0$ dès que $i \geqslant j$.*

Remarque 3.3.6 *De manière évidente, l'espace des matrices triangulaires supérieures (resp. triangulaires inférieures) et l'espace des matrices triangulaires supérieures strictes (resp. triangulaires inférieures strictes) sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}(p, \mathbb{K})$.*

Proposition 3.3.6 *Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}(p, \mathbb{K})$ triangulaires supérieures. Alors AB est triangulaire supérieure.*

Preuve: Posons $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant p}$ et $B = (b_{jk})_{1\leqslant j,k\leqslant p}$. Soit $C = (c_{ik})_{1\leqslant i,k\leqslant p} = AB$. En utilisant la remarque 3.3.5, montrons que $c_{ik} = 0$ pour $i > k$. On a :

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{p} a_{ij}b_{jk} = \sum_{j=1}^{k} a_{ij}b_{jk} + \sum_{j=k+1}^{p} a_{ij}b_{jk}$$

Si $1 \leqslant j \leqslant k$, alors comme $k < i$, on a $j < i$ et donc $a_{ij} = 0$ puisque A est triangulaire supérieure. D'où $\displaystyle\sum_{j=1}^{k} a_{ij}b_{jk} = 0$.

Si $k+1 \leqslant j \leqslant p$, alors $j > k$ donc $b_{jk} = 0$ puisque B est triangulaire supérieure. D'où $\displaystyle\sum_{j=k+1}^{p} a_{ij}b_{jk} = 0$.

On en déduit alors que $c_{ik} = 0$ pour $i > k$, et C est une matrice triangulaire supérieure.

$\square$

3.4 Transposée d'une matrice

Définition 3.4.1 *Soit $A \in \mathcal{M}(p,q,\mathbb{K})$, $A = (a_{ij})_{1\leqslant i\leqslant p, 1\leqslant j\leqslant q}$. On appelle* **transposée** *de A et on note ${}^tA$, la matrice de $\mathcal{M}(q,p,\mathbb{K})$ définie par : ${}^tA = (b_{ij})_{1\leqslant i\leqslant q, 1\leqslant j\leqslant p}$ et $b_{ij} = a_{ji}$.*

Prendre la transposée d'une matrice consiste à mettre les lignes en colonnes et les colonnes en ligne.

Exemples:

$$^t\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \quad , \quad {}^t\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$^t\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 10 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 10 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Proposition 3.4.1 *On a :*

1. $\forall A \in \mathcal{M}(p,q,\mathbb{K}),\ {}^t({}^tA) = A$.
2. $\forall A, B \in \mathcal{M}(p,q,\mathbb{K}), \forall \lambda, \mu \in K,\ {}^t(\lambda A + \mu B) = \lambda {}^tA + \mu {}^tB$.
3. $\forall A \in \mathcal{M}(p,q,\mathbb{K}), \forall B \in \mathcal{M}(q,r,\mathbb{K}),\ {}^t(AB) = {}^tB\ {}^tA$.
4. $\forall A \in GL(n,\mathbb{K}),\ {}^tA \in GL(n,\mathbb{K})$ *et* $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.

3.5 Calcul de l'inverse d'une matrice

Théorème 3.5.1 *Soit $A \in \mathcal{M}(n,\mathbb{K})$. Supposons qu'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}(n,\mathbb{K})$ telle que pour tout $X \in \mathcal{M}(n,1,\mathbb{K})$ et $Y = AX$, on ait $X = BY$. Alors A est inversible et $A^{-1} = B$.*

PREUVE: Pour tout $X \in \mathcal{M}(n,1,\mathbb{K})$, on a donc $X = (BA)X$ (Attention ! Il n'est pas question de multiplier à droite par l'inverse de X ; X est une matrice colonne et non une matrice carrée ; l'inverse de X n'a donc pas de sens !). En particulier on a $E_i = (BA)E_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$ où les matrices E_i sont définies comme suit :

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\ E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots,\ E_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Notons $BA = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$. Alors $BAE_i = \begin{pmatrix} \alpha_{1i} \\ \vdots \\ \alpha_{ni} \end{pmatrix} = E_i$. On en déduit donc que $BA = I_n$. La matrice A est donc inversible et $A^{-1} = B$.

□

Ce théorème nous dit tout simplement qu'inverser une matrice revient à résoudre un système.

Exemple:

On veut calculer l'inverse de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. Soient $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$ avec $Y = AX$. On a alors :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & y_1 \\ x_1 & + & 2x_2 & & & + & 2x_4 & = & y_2 \\ -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & y_3 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & + & 2x_4 & = & y_4 \end{array}\right.$$

On va résoudre ce système en effectuant un pivot total :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & \boxed{x_3} & + & x_4 & = & y_1 \\ x_1 & + & 2x_2 & & & + & 2x_4 & = & y_2 \\ -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & y_3 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & + & 2x_4 & = & y_4 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{llllcllll} x_1 & +x_2 & +\boxed{x_3} & +x_4 & = & y_1 & & & \\ x_1 & +\boxed{2x_2} & & +2x_4 & = & & y_2 & & \\ -2x_1 & & & -2x_4 & = & -y_1 & & +y_3 & \\ 3x_1 & +4x_2 & & +4x_4 & = & 2y_1 & & & +y_4 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{llllcllll} x_1 & & +\boxed{x_3} & & = & y_1 & -y_2 & & \\ x_1 & +\boxed{2x_2} & & +2x_4 & = & & y_2 & & \\ -2x_1 & & & \boxed{-2x_4} & = & -y_1 & & +y_3 & \\ x_1 & & & & = & 2y_1 & -2y_2 & & +y_4 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{llllcllll} x_1 & & +\boxed{x_3} & & = & y_1 & -y_2 & & \\ -x_1 & +\boxed{2x_2} & & & = & -y_1 & +y_2 & +y_3 & \\ -2x_1 & & & \boxed{-2x_4} & = & -y_1 & & +y_3 & \\ \boxed{x_1} & & & & = & 2y_1 & -2y_2 & & +y_4 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{lllllllll} & & +\boxed{x_3} & & = & & y_2 & & -y_4 \\ & +\boxed{2x_2} & & & = & y_1 & -y_2 & +y_3 & +y_4 \\ & & & \boxed{-2x_4} & = & 3y_1 & -4y_2 & +y_3 & +2y_4 \\ \boxed{x_1} & & & & = & 2y_1 & -2y_2 & & +y_4 \end{array}\right.$$

Finalement

$$\left\{\begin{array}{llllll} x_1 & = & 2y_1 & -2y_2 & & +y_4 \\ x_2 & = & y_1 & -y_2 & +y_3 & +y_4 \\ x_3 & = & & y_2 & & -y_4 \\ x_4 & = & -y_1 & +2y_2 & -y_3 & -y_4 \end{array}\right.$$

et $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 1 \\ & - & & \\ 0 & & 0 & - \\ - & 2 & - & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$. Donc A est inversible et

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -3 & 4 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

3.6 Exercices

45. On donne les 4 matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 3 & -3 \\ -1 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Quels sont les produits 2 à 2 de ces matrices qui ont un sens ? Effectuer ces produits.

46. Quelles sont les matrices (2,2) A telles que $AM = MA$ dans les cas suivants :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dans chacun des cas, peut-on toujours trouver λ et μ tels que $A = \lambda M + \mu I$?
Est-ce toujours vrai pour toute matrice M ?

47. Effectuer le produit des deux matrices formées des mots suivants en omettant les signes d'opérations (Raymond Queneau 1964)

$$\begin{pmatrix} \text{le} & \text{a} & \text{le} \\ \text{un} & \text{a} & \text{un} \\ \text{le} & \text{avait} & \text{un} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{chat} & \text{rat} & \text{lion} \\ \text{mangé} & \text{dévoré} & \text{dégusté} \\ \text{poisson} & \text{fromage} & \text{touriste} \end{pmatrix}.$$

48. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}(n, K)$ qui commutent (i.e. $AB = BA$). Montrer la formule du binôme de Newton : $(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{n-k} B^k$.

49. On considère les 3 matrices suivantes :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

1) Vérifier les relations :

$$J^2 = K^2 = L^2 = -I \quad , \quad KL = -LK = J$$

2) En déduire les relations $LJ = -JL = K$ et $JK = -KJ = L$.

3) On considère le sous-espace vectoriel $\mathbb{H}$ de $\mathcal{M}(4,\mathbb{R})$ engendré par I, J, K et L. Trouver une base de $\mathbb{H}$ et donner sa dimension.

4) Montrer que $\mathbb{H}$ est stable par multiplication, puis montrer que toute matrice non nulle de $\mathbb{H}$ admet un inverse dans $\mathbb{H}$.

50. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$. Calculer A^2. En déduire A^{-1}. Vérifier en inversant directement A.

51. On note $M(a,b,c,d)$ la matrice (4,4) dépendant des 4 paramètres réels $a,\ b,\ c,\ d$ définie par

$$M(a,b,c,d) = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{pmatrix}$$

(1) Calculer le produit $M(a,b,c,d)M(a',b',c',d')$. Que remarque-t-on ?

(2) Calculer le produit $M(a,b,c,d)M(a,b,-c,-d)$.

(3) Calculer le produit des quatre matrices $M(a,b,c,d)M(a,b,-c,-d)M(a,-b,c,-d)M(a,-b,-c,d)$ (faire d'abord le produit des deux dernières).

(4) Trouver un critère, portant sur $a,\ b,\ c,\ d$, pour que M soit inversible et proposer un calcul de son inverse.

52. On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -3 & 8 & -16 \\ -3 & 7 & -12 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$. Calculer AB et BA puis déterminer $(AB)^{-1}$ et $(BA)^{-1}$.

53. Calculer l'inverse des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} i & 2 & -3 \\ 0 & i & 2 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

54. Soit A une matrice (n,n) telle que $A^2 = A$ et $A \neq I$. Montrer que A n'est pas inversible.

Trouver toutes les matrices (2,2) autres que I et O, telles que $A^2 = A$. Que peut-on dire de leurs lignes et de leurs colonnes ?

55. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice carrée $(2,2)$. Trouver à quelle condition A est inversible et déterminer son inverse.

56. Calculer la transposée des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \ , \ B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ , \ C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \ , \ D = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \ .$$

Vérifier que$^t\,(BC) = {}^tC{}^tB$.

57. Soient a et b deux réels fixés, on considère l'ensemble suivant :

$$\mathcal{A} = \{(u_n)_{n\geqslant 0} \mid \forall\ n \in \mathbb{N}\ ,\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n\}$$

(a) Montrer que c'est un sous-espace vectoriel de l'espace des suites.

(b) Pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et tout $n \geqslant 0$, on considère la matrice colonne $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$. Pour toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0} \in \mathcal{A}$, exprimer X_n en fonction de X_0.

(c) En déduire la dimension de $\mathcal{A}$.

58. Si $A = (a_{ij})$ est une matrice carrée (n, n), on appelle "trace" de A et l'on note trace A la somme $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii}$. Montrer les propriétés suivantes :

(a) trace $(\lambda\mathrm{A} + \mu\mathrm{B}) = \lambda$trace $(\mathrm{A}) + \mu$trace (B) , (b) trace $({}^t\mathrm{A})$ = trace A , (c) trace (AB) = trace (BA),

(d) Si P est inversible, trace (PAP^{-1}) = trace A.

59. Soit $n \geqslant 2$ et soient $a \in \mathbb{R} - \{0\}$, $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{a} \\ \vdots \\ \frac{1}{a^{n-1}} \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ \vdots \\ a^{n-1} \end{pmatrix}$.

1) Calculer la matrice $H = U{}^tV$ puis ${}^tVU$.

2) En déduire une expression de H^2 en fonction de H.

3) Pour tous $\lambda \in \mathbb{R}$, on considère la matrice $A = H - \lambda I_n$, où I_n est la matrice identité $n \times n$. Exprimer A^2 en fonction de A et I_n.

4) En déduire que A est inversible si et seulement si $\lambda \neq 0$ et $\lambda \neq n$. Pour $\lambda \neq 0$ et $\lambda \neq n$, déterminer A^{-1}.

5) On suppose désormais que $\lambda = 1$. Calculer A^k pour $k \in \mathbb{N}^*$.
6) Calculer A^k pour $k \in \mathbb{Z}$.

60. Soit A une matrice carrée de $\mathcal{M}(n, \mathbb{R})$ vérifiant $A^2 = 2A - {}^tA$.
1) Exprimer $({}^tA)^2$ comme combinaison linéaire de A et ${}^tA$.
2) Montrer que ${}^tAA = A{}^tA$.
3) On suppose désormais que $n = 3$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Vérifier que $A^2 = 2A - {}^tA$.
4) Calculer ${}^tAA$ et l'exprimer comme combinaison linéaire de A et ${}^tA$.
5) Soit $\mathcal{C}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}(3, \mathbb{R})$ engendré par A et ${}^tA$. Montrer que le produit de deux éléments de $\mathcal{C}$ est encore dans $\mathcal{C}$. Le produit dans $\mathcal{C}$ est-il commutatif ?
6) Montrer que $(A, {}^tA)$ est un système libre. En déduire la dimension de $\mathcal{C}$.
7) Montrer qu'il existe une unique matrice $J \in \mathcal{C}$ telle que $JA = A$. Après avoir vérifié que ${}^tJ = J$, déduire que $J{}^tA = {}^tA$ puis que $JM = MJ = M$ pour toute matrice $M \in \mathcal{C}$.
8) Déduire de la question précédente qu'aucune matrice de $\mathcal{C}$ n'est inversible.
9) Montrer que s'il existe une matrice $K \in \mathcal{C}$ telle que $K^2 = -J$, alors (J, K) est une base de $\mathcal{C}$.
10) Pour tous $x, y, x', y' \in \mathbb{R}$, exprimer le produit $(xJ + yK)(x'J + y'K)$ en fonction de J et K. Que remarque-t-on ?
11) Déduire de la relation obtenue dans la question précédente, que pour toute matrice non nulle M de $\mathcal{C}$, il existe une matrice N de $\mathcal{C}$ telle que $MN = NM = J$.
12) Trouver toutes les matrices $K \in \mathcal{C}$ vérifiant $K^2 = -J$.

61. On dit qu'une matrice carrée A est symétrique si ${}^tA = A$ et antisymétrique si ${}^tA = -A$. Soient $\mathcal{S}(p, \mathbb{R})$ l'espace des matrices carrées symétriques d'ordre p et $\mathcal{A}(p, \mathbb{R})$ l'espace des matrices anti-symétriques d'ordre p. On note $E^{(i,j)}$ les matrices de $\mathcal{M}(p, \mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui de la ième ligne et de la jème colonne qui est égal à 1.

A) a) Montrer que les matrices $E^{(i,i)}$ pour $1 \leqslant i \leqslant p$ et $\frac{1}{2}(E^{(i,j)} + E^{(j,i)})$ pour $1 \leqslant i < j \leqslant p$ forment une base de $\mathcal{S}(p, \mathbb{R})$. En déduire que la dimension de $\mathcal{S}(p, \mathbb{R})$ est $p(p+1)/2$.
b) Montrer que les matrices $\frac{1}{2}(E^{(j,i)} - E^{(i,j)})$ pour $1 \leqslant i < j \leqslant p$ forment une base de $\mathcal{A}(p, \mathbb{R})$. En déduire que la dimension de $\mathcal{A}(p, \mathbb{R})$ est $p(p-1)/2$.
c) Montrer que $\mathcal{M}(p, \mathbb{R}) = \mathcal{S}(p, \mathbb{R}) \bigoplus \mathcal{A}(p, \mathbb{R})$.

B) On appelle matrice magique de $\mathcal{M}(3, 3; \mathbb{R})$ une matrice $A = (a_{ij})$ telle que les huit sommes

$$a_{i1} + a_{i2} + a_{i3} \ (1 \leqslant i \leqslant 3)\ ,\ a_{1j} + a_{2j} + a_{3j} \ (1 \leqslant j \leqslant 3)\ ,\ a_{11} + a_{22} + a_{33} \text{ et } a_{13} + a_{22} + a_{31}$$

sont égales. On notera $s(A)$ la valeur commune de ces sommes.
a) Montrer que l'ensemble $\mathcal{M}a$ des matrices magiques est un sous-espace de $\mathcal{M}(3, 3; \mathbb{R})$.

b) Si A est antisymétrique, que vaut $s(A)$? Déterminer l'espace $\mathcal{M}a^-$ de toutes les matrices antisymétriques de $\mathcal{M}a$.

c) Déterminer l'espace $\mathcal{M}a^+$ de toutes les matrices symétriques de $\mathcal{M}a$.

d) Montrer que $\mathcal{M}a = \mathcal{M}a^+ \oplus \mathcal{M}a^-$ et en déduire une expression de toutes les matrices magiques. Quelle est la dimension de $\mathcal{M}a$?

62. (Calculs par blocs) Montrer que si A et D sont des matrices carrées inversibles de formats respectifs (p_1, p_1) et (p_2, p_2) alors $M = \begin{pmatrix} A & B \\ O & D \end{pmatrix}$ est inversible et

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BD^{-1} \\ O & D^{-1} \end{pmatrix} .$$

Chapitre 4

MATRICES ÉLÉMENTAIRES ET PIVOT DE GAUSS

4.1 Opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots\cdots & a_{1q} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \cdots\cdots & a_{pq} \end{pmatrix}$. Soient $(C_k)_{1\leqslant k\leqslant q}$ les colonnes de A et $(L_k)_{1\leqslant k\leqslant p}$ les lignes de A.

Définition 4.1.1 *On appelle* **opération élémentaire** *sur les colonnes de A,*

— *le remplacement d'une colonne C_j par $C_j+\lambda C_i$ $(j \neq i)$. On parle alors d'***opération de première espèce***.*

— *le remplacement d'une colonne C_i par μC_i $(\mu \neq 0)$. On parle alors d'***opération de deuxième espèce***.*

— *l'échange de deux colonnes de A. On parle alors d'***opération de troisième espèce***.*

De même,

Définition 4.1.2 *On appelle opération élémentaire sur les lignes de A,*

— *le remplacement d'une ligne L_j par $L_j+\lambda L_i$ $(j \neq i)$. On parle alors d'***opération de première espèce***.*

— *le remplacement d'une ligne L_i par μL_i $(\mu \neq 0)$. On parle alors d'***opération de deuxième espèce***.*

— *l'échange de deux lignes de A. On parle alors d'***opération de troisième espèce***.*

On rappelle que pour tout couple (i,j) $(1 \leqslant i,j \leqslant q)$, la matrice $E^{(i,j)}_{(q,q)}$ est la matrice carrée de $\mathcal{M}(q,\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui de la i-ième ligne et de la j-ième colonne qui est égal à 1.

On peut alors remarquer que :

$$AE^{(i,j)}_{(q,q)} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots\cdots & a_{1q} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \cdots\cdots & a_{pq} \end{pmatrix} \begin{array}{c} 1 \ \text{ est à la } i-\text{ième ligne} \\ \text{et } \ j-\text{ième colonne} \\ \downarrow \\ \begin{pmatrix} & & \vdots & & \\ & & 0 & & \\ \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ & & 0 & & \\ & & \vdots & & \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} j-\text{ième colonne} \\ \downarrow \\ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1i} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & a_{2i} & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{pi} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

de même pour i,j compris entre 1 et p,

$$E^{(i,j)}_{p,p}A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots\cdots\cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & & 0 \\ a_{j1} & \cdots\cdots\cdots & a_{jp} \\ 0 & & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \longleftarrow i-\text{ième ligne}$$

Définissons maintenant les matrices élémentaires.

Définition 4.1.3 *On appelle matrices élémentaires les matrices du type suivant :*

— $T^{(i,j)}_{\lambda,q} = I_q + \lambda E^{(i,j)}_{(q,q)} \in \mathcal{M}(q,\mathbb{K})$ *pour tout* $\lambda \in K$, *et tout entier* i,j *compris entre* 1 *et* q.

— $D^{(i)}_{\mu,q} = I_q + (\mu - 1)E^{(i,i)}_{(q,q)}$ *pour tout* $\mu \in K$ *non nul et tout entier* i *compris entre* 1 *et* q.

— $S^{(i,j)}_q = I_q - E^{(i,i)}_{(q,q)} + E^{(i,j)}_{(q,q)} + E^{(j,i)}_{(q,q)} - E^{(j,j)}_{(q,q)}$ *pour tout entier* i,j *compris entre* 1 *et* q.

Nous allons maintenant relier ces matrices élémentaires aux opérations élémentaires définies plus haut.

Proposition 4.1.1 *Soit* $A \in \mathcal{M}(p,q,\mathbb{K})$ *et soit* $A' = AT^{(i,j)}_{\lambda,q}$. *Alors la matrice* A' *est obtenue en remplaçant la colonne* C_j *de* A *par* $C_j + \lambda C_i$.

De même, soit $A' = T^{(i,j)}_{\lambda,p}A$. *Alors* A' *est obtenue en remplaçant la ligne* L_i *de* A *par* $L_i + \lambda L_j$.

PREUVE: D'après ce qu'on a montré plus haut, on a :

$$A' = A + \lambda A E^{(i,j)}_{(q,q)} = A + \begin{array}{c} j-\text{ième colonne} \\ \downarrow \\ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \lambda a_{1i} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \lambda a_{2i} & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda a_{pi} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} + \lambda a_{1i} & \cdots & a_{1q} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pj} + \lambda a_{pi} & \cdots & a_{pq} \end{pmatrix}$$

□

Proposition 4.1.2 *Soit $A \in \mathcal{M}(p,q,\mathbb{K})$ et $A' = AD^{(i)}_{\mu,q}$. Alors A' est obtenue en remplaçant la colonne C_i de A par μC_i.*

De même, soit $A' = D^{(i)}_{\mu,p}A$. Alors A' est obtenue en remplaçant la ligne L_i de A par μL_i.

PREUVE:

$$A' = A + (\mu - 1) A E^{(i,i)}_{(q,q)} = A + \begin{array}{c} i-\text{ième colonne} \\ \downarrow \\ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & (\mu-1) a_{1i} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & (\mu-1) a_{2i} & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & (\mu-1) a_{pi} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \mu a_{1i} & \cdots & a_{1q} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & \mu a_{pi} & \cdots & a_{pq} \end{pmatrix}$$

□

Proposition 4.1.3 *Soit $A \in \mathcal{M}(p,q,\mathbb{K})$ et soit $A' = AS^{(i,j)}_q$. Alors A est obtenue en échangeant dans A les colonnes C_i et C_j.*

De même, soit $A' = S^{(i,j)}_p A$. Alors A est obtenue en échangeant dans A les lignes L_i et L_j.

PREUVE: On suppose que $i < j$. Alors :

$$AS_q^{(i,j)} = A - AE_{(q,q)}^{(i,i)} + AE_{(q,q)}^{(i,j)} + AE_{(q,q)}^{(j,i)} - AE_{(q,q)}^{(j,j)}$$

$$= A - \begin{array}{c} i-\text{ième colonne} \\ \downarrow \\ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1i} & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & a_{2i} & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{pi} & 0 & \cdots\cdots & 0 \end{pmatrix} \end{array} + \begin{array}{c} j-\text{ième colonne} \\ \downarrow \\ \begin{pmatrix} 0 & \cdots\cdots & 0 & a_{1i} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & a_{2i} & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots\cdots & 0 & a_{pi} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$+ \begin{array}{c} i-\text{ième colonne} \\ \downarrow \\ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1j} & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & a_{2j} & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{pj} & 0 & \cdots\cdots & 0 \end{pmatrix} \end{array} - \begin{array}{c} j-\text{ième colonne} \\ \downarrow \\ \begin{pmatrix} 0 & \cdots\cdots & 0 & a_{1j} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & a_{2j} & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots\cdots & 0 & a_{pj} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$= \begin{array}{c} i-\text{ième colonne} \quad j-\text{ième colonne} \\ \downarrow \qquad\qquad \downarrow \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1q} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pj} & \cdots & a_{pi} & \cdots & a_{pq} \end{pmatrix} \end{array}$$

□

Proposition 4.1.4 *Les matrices élémentaires sont inversibles et on a :*

1. $(T_{\lambda,q}^{(i,j)})^{-1} = T_{-\lambda,q}^{(i,j)}$ *pour tout* $\lambda \in K$*, et tout entier* i, j *compris entre* 1 *et* q.
2. $(D_{\mu,q}^{(i)})^{-1} = D_{1/\mu,q}^{(i)}$ *pour tout* $\mu \in K$ *non nul et tout entier* i *compris entre* 1 *et* q.
3. $(S_q^{(i,j)})^{-1} = S_q^{(j,i)}$ *pour tout entier* i, j *compris entre* 1 *et* q.

Preuve: D'après l'interprétation faite dans les propositions 4.1.1 à 4.1.3 de la multiplication par des matrices élémentaires en terme d'opérations élémentaires, il est facile de voir que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}(p, q, \mathbb{K})$,

1. $AT_{\lambda,q}^{(i,j)} T_{-\lambda,q}^{(i,j)} = A$.
2. $AD_{\mu,q}^{(i)} D_{1/\mu}^{(i)} = A$.
3. $AS_q^{(i,j)} S_q^{(j,i)} = A$.

En prenant en particulier comme matrice A la matrice carrée identité I_q, on en déduit les résultats souhaités. □

Remarque 4.1.1 *Appliqué la méthode du pivot de Gauss à un système*

$$(\mathcal{S})\quad \begin{cases} a_{11}x_1 + & \cdots & +a_{1q}x_q & = & y_1 \\ a_{21}x_1 + & \cdots & +a_{2q}x_q & = & y_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{p1}x_1 + & \cdots & +a_{pq}x_q & = & y_p \end{cases}$$

consiste à multiplié à gauche la matrice du système par des matrices élémentaires successives.

4.2 Matrices équivalentes et matrices semblables

Définition 4.2.1 *Soit $A \in \mathcal{M}(p,q,K)$ et $B \in \mathcal{M}(p,q,K)$. On dit que A est* **équivalente** *à B s'il existe $P \in GL(p,K)$ et $Q \in GL(q,K)$ telles que $B = Q^{-1}AP$.*

Proposition 4.2.1 *La relation "être équivalente" est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}(p,q,K)$. Autrement dit :*

- *Pour tout $A \in \mathcal{M}(p,q,K)$, A est équivalente à A, la relation est* **réflexive***.*
- *Pour tous A et B de $\mathcal{M}(p,q,K)$, si A est équivalente à B alors B est équivalente à A, la relation est* **symétrique***. On dit alors que les deux matrices sont équivalentes.*
- *Pour tous A, B et C de $\mathcal{M}(p,q,K)$, si A est équivalente à B et B équivalente à C, alors A est équivalente à C, la relation est* **transitive***.*

Proposition 4.2.2 *Soient A et B deux matrices carrées équivalentes. Alors A est inversible si et seulement si B est inversible.*

Proposition 4.2.3 *Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}(p,q,K)$ non nulle il existe un entier $r \in \{1,\dots,\min(p,q)\}$ tel que A est équivalente à*

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

r étant le nombre de 1.

Preuve: Posons $n = \max(p,q)$. Pour $n = 1$ le résultat est évident. Supposons jusqu'au rang $n \geqslant 1$ qu'il existe des matrices $P \in GL(p,K)$ et $Q \in GL(q,K)$ telles que PAQ soit de la forme annoncée et P et Q soient des produits de matrices élémentaires. Autrement dit PAQ est obtenue en effectuant des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes de A.

Montrons que cela reste vrai au rang $n+1$. Comme A est non nulle il existe au moins un coefficient non nul et en effectuant des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes il est facile de voir que l'on peut obtenir la matrice suivante

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \dots 0 \\ 0 & \\ \vdots & A' \\ 0 & \end{pmatrix}$$

où A' est une matrice de taille $(p-1, q-1)$ et $\max(p-1, q-1) = n$. Si A' est nulle le résultat est vrai au rang $n+1$. Sinon par hypothèse de récurrence en effectuant des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes de A' on obtient une matrice du type de B. En faisant les mêmes opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes de A_1 on obtient encore une matrice du type de B. Cette nouvelle matrice a donc été obtenue en multipliant A à droite et à gauche par des matrices élémentaires. Les matrices élémentaires étant inversibles et leur produit l'étant aussi (d'après la proposition 3.4 du chapitre 3) on en déduit que le résultat est vrai au rang $n+1$. $\square$

Définition 4.2.2 *Soit $(A, B) \in \mathcal{M}(n, K)^2$ un couple de matrices carrées. On dit que A est semblable à B, s'il existe une matrice $P \in GL(n, K)$ telle que : $B = P^{-1}AP$.*

Proposition 4.2.4 *La relation "être semblable" est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}(n, K)$.*

Chapitre 5

MATRICE D'UNE APPLICATION LINÉAIRE, CHANGEMENTS DE BASES

5.1 Matrice d'une application linéaire

Définition 5.1.1 *Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie sur un corps $\mathbb{K}$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_q)$ une base de E et $\mathcal{B}' = (e'_1, ..., e'_p)$ une base de F. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Alors la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ (au départ) et $\mathcal{B}'$ (à l'arrivée) est la matrice A de $\mathcal{M}(p, q, \mathbb{K})$ dont les coefficients de la j-ième colonne sont les coordonnées de $f(e_j)$ dans la base $\mathcal{B}'$.*

La matrice A s'écrit donc de la façon suivante :

$$\begin{array}{cc} & \text{coordonnées dans } \mathcal{B}' \text{ de} \\ & \begin{array}{ccc} f(e_1) & \cdots\cdots & f(e_q) \\ \downarrow & & \downarrow \end{array} \\ A = & \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots\cdots & a_{1q} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \cdots\cdots & a_{pq} \end{pmatrix} \end{array}$$

où pour tout j compris entre 1 et q, $f(e_j) = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} a_{ij} e'_i$.

On notera $A = \text{mat}_{\ (\mathcal{B},\mathcal{B}')}(f)$.

Remarque 5.1.1 *Si $E = F$ et $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$, on dira simplement que A est la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ et on notera $A = mat_{\ \mathcal{B}}(f)$.*

Remarque 5.1.2 *Soit E un espace vectoriel de dimension p et $\mathcal{B}$ une base de E. Notons Id_E l'application identité de E. Alors mat $_{\mathcal{B}}(Id_E) = I_p$.*

Remarque 5.1.3 *Une application linéaire f est nulle si et seulement si mat $_{(\mathcal{B},\mathcal{B}')}(f) = 0$.*

Remarque 5.1.4 *Une application linéaire f est nulle si et seulement si mat $_{(\mathcal{B},\mathcal{B}')}(f) = 0$.*

On a vu au chapitre 1, que pour tout $x \in E$ il existe des scalaires x_1,...,x_n uniques tels que $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$.

Définition 5.1.2 *Pour tout $x \in E$, on appelle* **matrices des coordonnées** *(ou plus simplement* **coordonnées***) de x dans la base $\mathcal{B}$, la matrice colonne $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.*

Proposition 5.1.1 *Soient E et F deux espaces vectoriels sur un corps $\mathbb{K}$. Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases respectivement de E et F. Considérons une application $f : E \longrightarrow F$. Pour tout x dans E, notons X les coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$ et Y les coordonnées de $f(x)$ dans la base $\mathcal{B}'$.*

1. *Si f est linéaire et si $A =$ mat $_{(\mathcal{B},\mathcal{B}')}(f)$, alors on a $Y = AX$.*
2. *Réciproquement, s'il existe une matrice $A \in \mathcal{M}(p, q, \mathbb{K})$ telle que $Y = AX$, alors f est linéaire et $A =$ mat $_{(\mathcal{B},\mathcal{B}')}(f)$.*

Cette proposition n'est rien d'autre qu'une reformulation équivalente de la proposition 1.1 du chapitre 2.

Proposition 5.1.2 *Soient E et F deux espaces vectoriels sur un corps $\mathbb{K}$ de dimension respective q et p. Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases respectivement de E et F. Considérons l'application Φ définie de la façon suivante :*

$$\begin{array}{cccc} \Phi & : & \mathcal{L}(E,F) & \longrightarrow & \mathcal{M}(p,q,\mathbb{K}) \\ & & f & \longmapsto & mat_{(\mathcal{B},\mathcal{B}')}(f) \end{array}$$

Alors Φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels et $\dim \mathcal{M}(p, q, \mathbb{K}) = pq$.

Proposition 5.1.3 *Soient E et F deux espaces vectoriels sur un corps $\mathbb{K}$ de dimension respective q et p. Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases respectivement de E et F. Considérons l'application Φ définie de la façon suivante :*

$$\begin{array}{cccc} \Phi & : & \mathcal{L}(E,F) & \longrightarrow & \mathcal{M}(p,q,\mathbb{K}) \\ & & f & \longmapsto & mat_{(\mathcal{B},\mathcal{B}')}(f) \end{array}$$

Alors Φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels et $\dim \mathcal{M}(p, q, \mathbb{K}) = pq$.

Remarque 5.1.5 *La linéarité de Φ signifie que pour tout $(f,g) \in \mathcal{L}(E,F)$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$ on a :*

$$mat_{(\mathcal{B},\mathcal{B}')}(\lambda f + \mu g) = \lambda mat_{(\mathcal{B},\mathcal{B}')}(f) + \mu mat_{(\mathcal{B},\mathcal{B}')}(g)$$

Preuve: La linéarité de Φ se prouve sans aucun problème. Soit maintenant $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}(p,q,\mathbb{K})$, et notons $\mathcal{B} = (e_1,\ldots,e_q)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1,\ldots,e'_p)$. Alors l'application f définie par :

$$f(x_1e_1 + \ldots + x_qe_q) = \sum_{j=1}^{q} x_j \left(\sum_{i=1}^{p} a_{ij}e'_i\right)$$

est une application linéaire dont la matrice dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ est A. Donc $\Phi(f) = A$ et Φ est surjective. L'injectivité de Φ est immédiate puisque l'unique application linéaire ayant une matrice nulle est l'application linéaire nulle. Finalement Φ est un isomorphisme.

□

Théorème 5.1.1 *Soient E, F, G trois espaces vectoriels de dimension finie sur $\mathbb{K}$. Soient $\mathcal{B}$ une base de E, $\mathcal{B}'$ une base de F et $\mathcal{B}''$ une base de G. Soient $f : F \longrightarrow G$ et $g : E \longrightarrow F$ deux applications linéaires. Alors*

$$mat_{(\mathcal{B},\mathcal{B}'')}(f \circ g) = mat_{(\mathcal{B}',\mathcal{B}'')}(f) mat_{(\mathcal{B},\mathcal{B}')}(g)$$

Preuve: Posons $\mathcal{B} = (e_1,\ldots,e_r)$, $\mathcal{B}' = (e'_1,\ldots,e'_q)$ et $\mathcal{B}'' = (e''_1,\ldots,e''_p)$. D'autre part soient $A = \text{mat}_{(\mathcal{B}',\mathcal{B}'')}(f) = (a_{ij}) \in \mathcal{M}(p,q,\mathbb{K})$, $B = \text{mat}_{(\mathcal{B},\mathcal{B}')}(g) = (b_{jk}) \in \mathcal{M}(q,r,\mathbb{K})$ et $C = AB = (c_{ik}) \in \mathcal{M}(p,r,\mathbb{K})$. Alors :

$$\begin{aligned}
(f \circ g)(e_k) &= f\left(\sum_{j=1}^{q} b_{jk}e'_j\right) = \sum_{j=1}^{q} b_{jk}f(e'_j) \\
&= \sum_{j=1}^{q} b_{jk}\left(\sum_{i=1}^{p} a_{ij}e''_i\right) = \sum_{i=1}^{p}\left(\sum_{j=1}^{q} a_{ij}b_{jk}\right)e''_i \\
&= \sum_{i=1}^{p} c_{ik}e''_i
\end{aligned}$$

D'où l'on déduit que $mat_{(\mathcal{B},\mathcal{B}'')}(f \circ g) = C$.

□

5.2 Matrice d'une famille de vecteurs

Définition 5.2.1 *Soit $(u_1, ..., u_p)$ une famille de vecteurs de E de coordonnées respectives dans la base $\mathcal{B}$:*

$$X_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix} \quad , ..., \quad X_p = \begin{pmatrix} x_{1p} \\ \vdots \\ x_{np} \end{pmatrix}$$

Alors on appelle **matrice de la famille de vecteurs** $(u_1, ..., u_p)$ *dans la base $\mathcal{B}$, la matrice* $\begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{np} \end{pmatrix}$

On notera la matrice de la famille de vecteurs $\text{mat}_{\mathcal{B}}(u_1, ..., u_p)$.

Proposition 5.2.1 *Soient E et F deux espaces vectoriels sur un corps $\mathbb{K}$ et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ et $\mathcal{B}'$ deux bases respectivement de E et F. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors :*

$$mat_{\mathcal{B}'}(f(e_1), \ldots, f(e_n)) = mat_{(\mathcal{B},\mathcal{B}')}(f)$$

5.3 Changement de base

Définition 5.3.1 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Soient $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ et $\mathcal{B}' = (f_1, ..., f_n)$ deux bases. La matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est la matrice dont les colonnes sont formées des coordonnées des vecteurs f_i dans la base $\mathcal{B}$.*

C'est aussi la matrice de la famille de vecteurs $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$.

Si $f_j = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i$ alors $P = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

Théorème 5.3.1 *Soit x dans E. Soit X les coordonnées de x dans $\mathcal{B}$ et X' les coordonnées de x dans $\mathcal{B}'$. Alors $PX' = X$.*

PREUVE: On a pour tout j compris entre 1 et n, $f_j = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i$. Posons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$. Alors :

$$
\begin{aligned}
x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i = \sum_{j=1}^{n} x'_j f_j &= \sum_{j=1}^{n} x'_j \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x'_j e_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x'_j \right) e_i
\end{aligned}
$$

Par unicité des coordonnées, on en déduit que $x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x'_j$ et :

$$
\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}
$$

c'est-à-dire $X = PX'$. $\square$

Proposition 5.3.1 *Toute matrice de passage d'une base à une autre est inversible. Plus précisément si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie muni de deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ alors si P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ alors P^{-1} est la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$.*

Preuve: Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension p et $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. Soit P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et Q la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$. Pour tout $x \in E$ on note X les coordonnées de x dans $\mathcal{B}$ et X' les coordonnées de x dans $\mathcal{B}'$. Alors :

$$X = PX' = PQX$$

En considérant les matrices colonnes de $\mathcal{M}(p, 1, \mathbb{K})$ suivantes :

$$
E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, ..., E_p = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

On a : $PQE_i = E_i$ pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$. Ceci implique immédiatement que $PQ = I$, que P est inversible et que $Q^{-1} = P$. $\square$

Proposition 5.3.2 *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $\mathcal{B}$ une base de E. Soit $(u_1, \ldots, u_n)$ une famille de vecteurs et $P = mat_{\mathcal{B}}(u_1, \ldots, u_n)$. Alors $(u_1, \ldots, u_n)$ est une base de E si et seulement si P est inversible (dans ce cas P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $(u_1, \ldots, u_n)$).*

Preuve: Si $(u_1, \ldots, u_n)$ est une base, d'après la proposition précédente, P est inversible.

Supposons maintenant que P et inversible. Notons $C_1, \ldots, C_n$ les colonnes de P. Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = 0$. Alors $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i C_i = 0$ et il n'est pas difficile de voir qu'on a alors $PX = 0$ où $X = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$. Comme P est inversible on déduit immédiatement que $X = 0$ et que $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$. Donc $(u_1, \ldots, u_n)$ est une base de E. □

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur un corps $\mathbb{K}$. Soient $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux bases de E. Soit $x \in E$ et soient X et X' les coordonnées de x respectivement dans $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$. Si P est la matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_2$, alors le théorème 5.3.1 nous dit que $PX' = X$. De même soit F un espace vectoriel de dimension finie sur un corps $\mathbb{K}$ et soient $\mathcal{B}'_1$ et $\mathcal{B}'_2$ deux bases de F. Soit $y \in F$ et soient Y et Y' les coordonnées de y respectivement dans $\mathcal{B}'_1$ et $\mathcal{B}'_2$. Alors si Q est la matrice de passage de $\mathcal{B}'_1$ à $\mathcal{B}'_2$, on a $QY' = Y$.

Dans le théorème suivant, nous allons voir comment la matrice d'une application linéaire se transforme lorsqu'on change les bases au départ et à l'arrivée.

Théorème 5.3.2 *Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie. Soient $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux bases de E et $\mathcal{B}'_1$ et $\mathcal{B}'_2$ deux bases de F. Soient P la matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_2$ et Q la matrice de passage de $\mathcal{B}'_1$ à $\mathcal{B}'_2$.*

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Posons $A = mat_{(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}'_1)}(f)$ et $A' = mat_{(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}'_2)}(f)$. Alors :

$$A' = Q^{-1}AP$$

Preuve: Posons $y = f(x)$. En reprenant les mêmes notations que plus haut, on a $Y = AX$. Or comme $Y = QY'$ et $X = PX'$, on en déduit que :

$$QY' = APX'$$

Comme toute matrice de passage est inversible, Q^{-1} existe et en multipliant à gauche par Q^{-1}, on trouve :

$$Y' = Q^{-1}APX' = (Q^{-1}AP)X'$$

L'assertion 2. de la proposition 5.1.1 nous dit que $Q^{-1}AP$ est la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}_2$ et $\mathcal{B}'_2$, d'où $A' = Q^{-1}AP$. □

Proposition 5.3.3 *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension respective q et p. Soient $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{B}'$ une base de F. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $A = mat_{(\mathcal{B}, \mathcal{B}')}(f)$. Alors pour toute matrice B de $\mathcal{M}(p, q, \mathbb{K})$ équivalente à A il existe une base $\mathcal{B}_1$ de E et une base $\mathcal{B}'_1$ de F telle que $B = mat_{(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}'_1)}(f)$.*

Preuve: Comme B est équivalente à A, il existe deux matrices inversibles P et Q telles que $B = Q^{-1}AP$. Soient maintenant x un vecteur de E, X ses coordonnées dans $\mathcal{B}$ et Y les coordonnées de $f(x)$ dans $\mathcal{B}'$. Alors $Y = AX$, mais on a aussi :

$$Q^{-1}Y = (Q^{-1}AP)P^{-1}X = B(P^{-1}X)$$

Soient $\mathcal{B}_1 = (u_1, \ldots, u_n)$ et $\mathcal{B}'_1 = (u'_1, \ldots, u'_n)$ les familles de vecteurs telles que mat $_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_1) = P$ et mat $_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}'_1) = Q$. Comme P et Q sont inversibles, d'après la proposition 5.3.2, $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}'_1$ sont des bases respectivement de E et F.

Posons $X' = P^{-1}X$ et $Y' = Q^{-1}Y$. Alors X' et Y' sont les coordonnées respectivement de x dans $\mathcal{B}_1$ et $f(x)$ dans $\mathcal{B}'_1$. De plus : $Y' = BX'$. Donc d'après l'assertion 2. de la proposition 5.1.1, $B =$ mat $_{(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}'_1)}(f)$.

□

5.4 Rang d'une matrice et d'une application linéaire

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots\cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots\cdots & a_{np} \end{pmatrix}$. Soient $C_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$, $\cdots$, $C_p = \begin{pmatrix} a_{1p} \\ \vdots \\ a_{np} \end{pmatrix}$ les colonnes de A. Les matrices colonnes $C_1, \cdots, C_p$ sont donc des vecteurs de l'espace vectoriel $\mathcal{M}(n, 1, \mathbb{K})$.

Définition 5.4.1 *On appelle* **rang de la matrice** *A, le rang de la famille de vecteurs $(C_1, \cdots, C_p)$ et on note rg $(A) =$ rg $(C_1, \cdots, C_p)$.*

On rappelle que si E est un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$ et $(u_1, ..., u_p)$ est une famille de vecteurs alors le rang de la famille est la dimension du sous-espace vectoriel engendré par u_1,...,u_p (voir chapitre 1).

Associons maintenant à toute matrice $A \in \mathcal{M}(n, p, \mathbb{K})$, l'application linéaire :

$$\begin{array}{rccc} f_A & : & \mathcal{M}(p, 1, \mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}(n, 1, \mathbb{K}) \\ & & X & \mapsto & AX \end{array}$$

Dans la proposition qui suit nous relions le rang de A au rang de f_A.

Proposition 5.4.1 *On a rg $(A) =$ rg (f_A).*

Preuve: Considérons les matrices colonnes de $\mathcal{M}(p, 1, \mathbb{K})$ suivantes :

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, ..., E_p = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$(E_1, \cdots, E_p)$ est une base de $\mathcal{M}(p, 1, \mathbb{K})$ et d'après la proposition 4.1 du chapitre 2 on a :

$$\text{rg }(f_A) = \text{rg }(f_A(E_1), \cdots, f_A(E_p))$$

Un calcul rapide montre $f_A(E_k) = C_k$ pour tout entier $k \in \{1, \cdots, p\}$. Ceci achève la démonstration.

□

Soit maintenant E un espace vectoriel et $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de E. Considérons :

$$X_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix} \quad , \quad \cdots \quad , \quad X_p = \begin{pmatrix} x_{1p} \\ \vdots \\ x_{np} \end{pmatrix}$$

les coordonnées de u_1,...,u_p dans la base $\mathcal{B}$ (i.e. $u_j = \sum_{i=1}^{n} x_{ij} e_i$). Comme on l'a vu au paragraphe 1, la matrice de la famille de vecteurs $(u_1, ..., u_p)$ est la matrice $A \in \mathcal{M}(n, p, \mathbb{K})$ définie par :

$$A = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{np} \end{pmatrix}$$

On a alors la proposition suivante :

Proposition 5.4.2 *Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit $(u_1, ..., u_p)$ une famille de p vecteurs de E et A la matrice de la famille dans une base quelconque de E. Alors rg $(A) =$ rg $(u_1, ..., u_p)$.*

PREUVE: Soit $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de E. Considérons l'application linéaire :

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathcal{M}(p, 1, \mathbb{K}) & \longrightarrow & E \\ & X = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{pmatrix} & \longmapsto & f(X) = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j u_j \end{array}$$

Le sous-espace vectoriel engendré par $(u_1, ..., u_p)$ n'est rien d'autre que l'image de f. Il s'ensuit que rg $(f) =$ rg $(u_1, ..., u_p)$. D'autre part, soit $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de E et soit j l'application linéaire :

$$\begin{array}{rccc} j: & \mathcal{M}(n, 1, \mathbb{K}) & \longrightarrow & E \\ & \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} & \longmapsto & \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \end{array}$$

Remarquons que j est un isomorphisme. Soit $X = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{pmatrix}$ alors on a

$f(X) = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j u_j = \sum_{j=1}^{p} \left(\lambda_j \sum_{i=1}^{n} x_{ij} e_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{p} \lambda_j x_{ij} \right) e_i$. Donc :

$$(j^{-1} \circ f)(X) = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{p} x_{1j}\lambda_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{p} x_{nj}\lambda_j \end{pmatrix} = AX = f_A(X)$$

Comme j est un isomorphisme, on déduit de la proposition 4.2 du chapitre 2 que rg $(f_A) =$ rg $(j^{-1} \circ f) =$ rg (f). Donc rg $(f) =$ rg (A) et comme on a vu que rg $(f) =$ rg $(u_1, ..., u_p)$, la proposition est démontrée.

□

Théorème 5.4.1 *Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie sur $\mathbb{K}$ et soit $f : E \to F$ une application linéaire. Soit $\mathcal{B}$ une base de E, $\mathcal{B}'$ une base de F et A la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. Alors rg $(f) =$ rg (A).*

Preuve: Soient $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$. Alors

$$\text{rg } (f) = \dim \text{Im } (f) = \text{rg } (f(e_1), \ldots, f(e_n))$$

Mais la matrice de $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ dans la base $\mathcal{B}'$ n'est rien d'autre que la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ d'après la proposition 5.2.1. Donc rg $(f) =$ rg (A). □

De la proposition 4.2 du chapitre 2, on déduit immédiatement le résultat suivant :

Proposition 5.4.3 *Soient $A \in \mathcal{M}(p, q, \mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}(p, q, \mathbb{K})$ deux matrices équivalentes. Alors rg $(A) =$ rg (B).*

5.5 Rang et pivot de Gauss

Proposition 5.5.1 *Soit $A \in \mathcal{M}(n, p, \mathbb{K})$. Alors le nombre r de pivots obtenus après application de la méthode du pivot de Gauss est* **indépendant** *du choix des pivots et de l'ordre dans lequel ont été effectuées les opérations élémentaires.*

De plus on a $r =$ rg (A).

Corollaire 5.5.1 *Une matrice carrée $A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{K})$ est inversible si et seulement si rg $(A) = n$.*

Preuve de la proposition: En appliquant la méthode du pivot de Gauss sur les lignes de A et en échangeant les colonnes de façon à ce que les pivots soient dans les r premières colonnes, on obtient une matrice :

$$A' = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1r} & \alpha_{1,r+1} & \cdots & \alpha_{1p} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \alpha_{r-1,r} & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_{rr} & \alpha_{r,r+1} & \cdots & \alpha_{rp} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

où les coefficients $\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{rr}$ sont non nuls. On multiplie chacune des lignes par un coefficient non nul de façon à n'obtenir que des 1 sur la diagonale principale puis en appliquant la méthode du pivot de Gauss sur les colonnes on obtient la matrice (voir la proposition 2.3 du chapitre 4) :

$$A'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice A'' a été obtenue en multipliant à droite et à gauche par des produits de matrices élémentaires. Les matrices élémentaires étant inversibles et tout produit de matrices inversibles étant inversible il s'ensuit que A et A'' sont équivalentes.

D'après la proposition 5.4.3 on en déduit que $\mathrm{rg}\,(A) = \mathrm{rg}\,(A'')$.

Maintenant $\mathrm{rg}\,(A'') = \mathrm{rg}\,(E_1, \ldots, E_r) = r$ où $(E_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est la base canonique de l'espace vectoriel des matrices colonnes $\mathcal{M}(n, 1, \mathbb{K})$ (c'est-à-dire que E_i est la matrice colonne dont tous les coefficients sont nuls sauf celui de la ième ligne qui est égal à 1). $\square$

Preuve du corollaire: Soit A'' la matrice carrée obtenue comme dans la preuve précédente. La proposition 6.6 du chapitre 3 nous dit que A est inversible si et seulement si A'' est inversible.

Or A'' est diagonale et on a vu dans la proposition 4.6 du chapitre 3 qu'une matrice diagonale est inversible si et seulement si tous les éléments de la diagonale sont non nuls.

Donc A est inversible si et seulement si $\mathrm{rg}\,(A'') = n$, c'est-à-dire si et seulement si $\mathrm{rg}\,(A) = n$. $\square$

5.6 Exercices

63. Soit E un espace vectoriel de dimension 4 muni de la base (e_1, e_2, e_3, e_4). On considère l'application $f : E \longrightarrow E$ définie de la façon suivante :

$$f(xe_1 + ye_2 + ze_3 + te_4) = te_1 + xe_2 + ye_3 + ze_4$$

Montrer que f est une application linéaire et déterminer son noyau, son image et son rang.

64. On considère l'application f de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^4$ définie par

$$f(x, y, z, t) = (ax + by + t, bx + ay + z, y + az + bt, x + bz + at)$$

où a et b sont des réels quelconques.

1) Écrire f sous une forme matricielle $Y = AX$, où X et Y sont les matrices coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ respectivement des vecteurs x et $f(x)$. En déduire que f est linéaire. Écrire sa matrice dans les bases canoniques.

2) On considère les 4 vecteurs

$$v_1 = (1, 1, 1, 1) \quad , \quad v_2 = (-1, 1, -1, 1) \quad , \quad v_3 = (-1, -1, 1, 1) \quad , \quad v_4 = (1, -1, -1, 1)$$

Montrer qu'ils forment une base de $\mathbb{R}^4$.

3) Écrire les coordonnées des images de $v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4$ par f, d'abord dans la base canonique, puis dans la base $(v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4)$.

4) Écrire la matrice de f dans la base $(v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4)$ (au départ et à l'arrivée).

5) Écrire la matrice de passage P de la base canonique à la base $(v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4)$.

6) Vérifier vos calculs à l'aide d'une formule du cours, après avoir inversé P.

65. On considère l'application f de $\mathbb{R}^5$ dans $\mathbb{R}^4$ définie par

$$f(x, y, z, t, u) = (x+y+2z+t-u, -2x-y-3z-3t, 2x+3y+5z+t-4u, -x+2y+z-4t-5u)$$

1) Montrer que f est linéaire et déterminer sa matrice A dans les bases canoniques.

2) Calculer le rang de f. Montrer que $w_1 = (1, -2, 2, -1)$ et $w_2 = (1, -1, 3, 2)$ sont dans l'image de f, et qu'ils forment une base de cette image.

3) On note $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ la base **canonique** de $\mathbb{R}^5$ et (e'_1, e'_2, e'_3, e'_4) la base **canonique** de $\mathbb{R}^4$. Montrer que (w_1, w_2, e'_3, e'_4) est une base de $\mathbb{R}^4$.

4) Écrire la nouvelle matrice A_1 de f dans les bases $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ pour $\mathbb{R}^5$ et (w_1, w_2, e'_3, e'_4) pour $\mathbb{R}^4$.

5) Vérifier en calculant la matrice de passage P de (e'_1, e'_2, e'_3, e'_4) à (w_1, w_2, e'_3, e'_4) et la formule qui relie A, A_1 et P.

6) Quelle est la dimension du noyau de f ?

7) Donner des équations pour le noyau de f. Donner ensuite une base de ce noyau, que l'on appellera (v_3, v_4, v_5).

8) Montrer que $(e_1, e_2, v_3, v_4, v_5)$ est une nouvelle base de $\mathbb{R}^5$.

9) Donner la matrice de passage Q de $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ à cette nouvelle base.

10) Trouver la nouvelle matrice A_2 de f dans les bases $(e_1, e_2, v_3, v_4, v_5)$ pour $\mathbb{R}^5$ et (e'_1, e'_2, e'_3, e'_4) pour $\mathbb{R}^4$.

11) Soit A_3 la matrice de f dans les bases $(e_1, e_2, v_3, v_4, v_5)$ au départ et (w_1, w_2, e'_3, e'_4) à l'arrivée. Exprimer A_3 en fonction de A, P et Q, puis en fonction de A_1 et Q. Calculer A_3.

12) Aurait-on pu écrire facilement cette matrice ?

66. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

1) Déterminer Ker $(f - 6\mathrm{Id})$.

2) Montrer que Im $(f - 6\mathrm{Id}) =$ Ker $(f^2 + \mathrm{Id})$

3) Choisir un vecteur x dans Ker $(f - 6\mathrm{Id})$ et un vecteur y dans Ker $(f^2 + \mathrm{Id})$. Montrer que $(x, y, f(y))$ est une base de $\mathbb{R}^3$, et écrire la matrice de f dans cette base.

67. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -5 & -6 & -7 \\ 3 & 6 & 8 & 10 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

Construire une base de $\mathbb{R}^4$ en prenant deux vecteurs de Ker $(f + \mathrm{Id})$ et deux vecteurs de Ker f^2. Écrire la matrice de f dans cette base. Montrer, avec le minimum de calculs, que $f^3 + f^2 = 0$.

68. Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie. On considère une application linéaire $f : E \longrightarrow E$ qui vérifie la relation :

$$f \circ f = -\ \mathrm{Id}_E.$$

1) Soit x un vecteur non nul de E. On note F_x le sous-espace de E engendré par x et $f(x)$.

a) Pour tout élément y de F_x, montrer que $f(y)$ est aussi dans F_x.

b) Montrer que x et $f(x)$ sont linéairement indépendants.

c) Quelle est la dimension de F_x ?

2) Soit z un vecteur non nul de E qui n'est pas dans F_x.

a) Montrer que les 3 vecteurs x, $f(x)$ et z sont indépendants.

b) On suppose désormais que E est de dimension 4. Montrer que les 4 vecteurs x, $f(x)$, z et $f(z)$ forment une base de E.

c) Écrire la matrice A de f dans cette base (au départ et à l'arrivée).

d) Calculer A^2 puis A^n pour tout entier n.

69. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2. Soit f un endomorphisme de E tel que $f \circ f \circ f = \mathrm{Id}_E$. On suppose qu'il existe un vecteur non nul $u \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $f(u) = \lambda u$.

1) Montrer que l'on a $f(u) = u$.

2) Soit v un vecteur de E non colinéaire à u. Posons $f(v) = au + bv$ et notons A la matrice de f dans la base (u, v). Écrire la matrice A et calculer A^3. En déduire que $f = \mathrm{Id}_E$.

70. Pour tout vecteur $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}(p, 1, \mathbb{R})$, on note ${}^t\!X$ la matrice ligne $(x_1 ... x_p) \in \mathcal{M}(1, p, \mathbb{R})$.

1) Soient X et Y deux vecteurs de $\mathcal{M}(p, 1, \mathbb{R})$. Expliquer pourquoi on peut faire le produit $X\,{}^t Y$. Donner le nombre de lignes et de colonnes de $X\,{}^t Y$.

2) Même question pour ${}^t XY$.

3) Montrer que A est inversible si et seulement si $({}^t XA = 0 \Longrightarrow X = 0)$.

4) Soient $A \in \mathcal{M}(p, \mathbb{R})$ une matrice inversible et U et V deux vecteurs de $\mathcal{M}(p, 1, \mathbb{R})$. Montrer que $A + U\,{}^t V$ est inversible si et seulement si $1 + {}^t V A^{-1} U \neq 0$. (Pour la réciproque, on pourra utiliser le fait que $A + U\,{}^t V$ est inversible si et seulement si $(A + U\,{}^t V)X = 0$ est équivalent à $X = 0$).

Chapitre 6

SYSTÈMES LINÉAIRES

6.1 Définitions et généralités

Soit $(\mathcal{S})$ un système d'équations linéaires, c'est-à-dire la donnée de p équations linéaires à q inconnues à coefficients dans un corps $\mathbb{K}$:

$$(\mathcal{S}) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + & \cdots & +a_{1q}x_q & = & y_1 \\ a_{21}x_1 + & \cdots & +a_{2q}x_q & = & y_2 \\ \quad\vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{p1}x_1 + & \cdots & +a_{pq}x_q & = & y_p \end{cases}$$

Définition 6.1.1 *1. La matrice* $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant q}}$ *s'appelle la* **matrice du système**.

2. $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_q \end{pmatrix}$ *s'appelle la* **colonne des inconnues**.

3. $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}$ *s'appelle la* **colonne des constantes**.

On peut remarquer aisément qu'on a :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots\cdots & a_{1q} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \cdots\cdots & a_{pq} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}$$

De manière immédiate on a alors la proposition suivante :

Proposition 6.1.1 *Soit $(\mathcal{S})$ un système d'équations linéaires de p équations linéaires à q inconnues à coefficients dans un corps K. Soit $A \in \mathcal{M}(p,q,\mathbb{K})$ la matrice du système, $X \in \mathcal{M}(q,1,\mathbb{K})$ la colonne des inconnues et $Y \in \mathcal{M}(p,1,\mathbb{K})$ la colonne des constantes. Alors :*

$$AX = Y$$

On pourra alors aussi noter le système : $(\mathcal{S}) : AX = Y$.

Définition 6.1.2 *Soit $(\mathcal{S}) : AX = Y$ un système d'équations. On appelle* **système d'équations homogène** *associé à $(\mathcal{S})$ le système $(\mathcal{S}_H) : AX = 0$.*

Définition 6.1.3 *On appelle* **rang** *du système $(\mathcal{S})$, le rang de la matrice du système.*

Proposition 6.1.2 *Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots\cdots & a_{1q} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \cdots\cdots & a_{pq} \end{pmatrix}$. Alors pour que le système $(\mathcal{S}) : AX = Y$ ait une solution pour $Y = Y_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}$ il faut et il suffit que :*

$$rg \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots\cdots & a_{1q} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & \cdots\cdots & a_{pq} & b_p \end{pmatrix} = rg\ (A)$$

Preuve: Posons $U_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{p1} \end{pmatrix}$,...,$U_q = \begin{pmatrix} a_{1q} \\ \vdots \\ a_{pq} \end{pmatrix}$. S'il existe une solution $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_q \end{pmatrix}$, alors on a :

$$x_1U_1 + \cdots + x_qU_q = Y_0$$

Cela signifie que B est combinaison linéaire de $U_1, \cdots, U_q$. Donc le sous-espace vectoriel engendré par $(U_1, \cdots, U_q, Y_0)$ est le même que celui engendré par $(U_1, \cdots, U_q)$. Le rang d'une famille de vecteurs étant la dimension du sous-espace qu'il engendre, on en déduit que rg $(U_1, \cdots, U_q, Y_0) =$ rg $(U_1, \cdots, U_q)$. Par définition du rang d'une matrice, on conclut que rg $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots\cdots & a_{1q} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & \cdots\cdots & a_{pq} & b_p \end{pmatrix} =$ rg (A).

Réciproquement, supposons que l'égalité ci-dessus est vraie. Cela signifie que les sous-espaces vectoriels engendrés par $(U_1, \cdots, U_q)$ et $(U_1, \cdots, U_q, Y_0)$ ont même dimension. Ils sont donc égaux et Y_0 est alors combinaison linéaire de $U_1, \cdots, U_q$. Il existe alors $x_1, \cdots, x_q$ tels que $x_1U_1 + \cdots + x_qU_q = Y_0$ et $(x_1, \cdots, x_q)$ est alors une solution du système.

□

Proposition 6.1.3 *Soit $A \in \mathcal{M}(p, q, \mathbb{K})$, $X_0 \in \mathcal{M}(q, 1, \mathbb{K})$ et $Y_0 \in \mathcal{M}(p, 1, \mathbb{K})$. Supposons que $AX_0 = Y_0$; on dit alors que X_0 est une* **solution particulière** *de $(\mathcal{S}) : AX = Y_0$. Alors $X \in \mathcal{M}(q, 1, \mathbb{K})$ est solution de $(\mathcal{S})$ si et seulement si $X = X_0 + X_H$ où X_H est une solution de l'équation homogène $AX = 0$.*

Preuve: Tout vecteur de la forme $X = X_0 + X_H$ où X_H est solution de l'équation homogène est évidemment solution de $(\mathcal{S})$. Réciproquement si X est une solution quelconque de $(\mathcal{S})$, alors $0 = AX - AX_0 = A(X - X_0)$. Donc $X_H = X - X_0$ est solution de l'équation homogène.

□

Définition 6.1.4 *Soit $A \in \mathcal{M}(p, \mathbb{K})$. Le système $(\mathcal{S}) : AX = Y$ est de* **Cramer** *si pour tout $Y \in \mathcal{M}(p, 1, \mathbb{K})$, il existe un unique $X \in \mathcal{M}(p, 1, \mathbb{K})$ tel que $AX = Y$.*

On termine cette section par un théorème établissant des équivalences entre le rang d'une matrice ou d'une système, l'inversibilité d'une matrice et la propriété d'un système d'être de Cramer.

Théorème 6.1.1 *Soit A une matrice carrée de $\mathcal{M}(p, \mathbb{K})$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *A est inversible.*
2. *Le système $(\mathcal{S}) : AX = Y$ est de Cramer.*
3. *$AX = 0$ implique que $X = 0$.*
4. *rg $(A) = p$.*

Preuve: On va montrer que
$1 \Longrightarrow 2$.
$2 \Longrightarrow 3$.
$3 \Longrightarrow 4$.
$4 \Longrightarrow 1$.

— $1 \Longrightarrow 2$: A étant inversible, pour tout $Y \in \mathcal{M}(p, 1, \mathbb{K})$, $X = A^{-1}Y$ est l'unique solution du système $Y = AX$ et $(\mathcal{S})$ est de Cramer.
— $2 \Longrightarrow 3$: soit X tel que $AX = 0$. Comme $(\mathcal{S})$ est de Cramer, il y a unicité de la solution de $AX = 0$. Donc $X = 0$.

— $3 \Longrightarrow 4$: soit :

$$\begin{array}{cccc} f_A & : & \mathcal{M}(p,1,\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}(p,1,\mathbb{K}) \\ & & X & \mapsto & AX \end{array}$$

Soit $X \in \text{Ker}\ (f_A)$, alors $AX = 0$ et l'assertion 3 nous dit que $X = 0$. Donc $\text{Ker}\ (f_A) = \{0\}$ et le théorème du rang implique que $\text{rg}\ (f_A) = \dim(\text{Im}\ (f_A)) = p$. Donc $\text{rg}\ (A) = p$ puisque $\text{rg}\ (f_A) = \text{rg}\ (A)$ d'après la proposition 4.1 du chapitre 5.

— $4 \Longrightarrow 1$: si $\text{rg}\ (A) = p$ alors $\text{rg}\ (f_A) = \dim(\text{Im}\ (f_A)) = p$. Donc $\text{Im}\ (f_A) = \mathcal{M}(p,1,\mathbb{K})$ et f_A est surjective et même un isomorphisme puisque l'espace de départ et l'espace d'arrivée sont les mêmes. Donc $\text{Ker}\ (f_A) = \{0\}$. Soit :

$$\begin{array}{cccc} g_A & : & \mathcal{M}(p,\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}(p,\mathbb{K}) \\ & & M & \mapsto & AM \end{array}$$

Alors g_A est une application linéaire. Si on note $X_1, \cdots, X_p$ les colonnes de M et $Y_1, \cdots, Y_p$ les colonnes de AM, alors il n'est pas difficile de voir que $Y_i = AX_i = f_A(X_i)$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant p$. Il s'ensuit que si $M \in \text{Ker}\ (g_A)$ alors $X_i \in \text{Ker}\ (f_A)$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant p$, et comme $\text{Ker}\ (f_A) = \{0\}$, on en déduit que $M = 0$ et $\text{Ker}\ (g_A) = \{0\}$. L'espace de départ et l'espace d'arrivée étant les mêmes, on en déduit que g_A est un isomorphisme et donc que g_A est surjective. Il existe alors une matrice $B \in \mathcal{M}(p,\mathbb{K})$ telle que $AB = I_p$, d'où A est inversible et $A^{-1} = B$.

□

6.2 Application à l'étude des sous-espaces vectoriels des espaces de dimension finie

6.2.1 Du système d'équations à la base

Soit $\mathcal{S}$ un système homogène de p équations à n inconnues :

$$(\mathcal{S}) \Longleftrightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 + & \cdots & + a_{1n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{p1}x_1 + & \cdots & + a_{pn}x_n & = & 0 \end{cases}$$

et soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix}$ la matrice du système. On rappelle que si $(x_1, \cdots, x_n)$ est solution de $(\mathcal{S})$ alors $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ est solution de $AX = 0$ et on note aussi $(\mathcal{S}) : AX = 0$.

D'autre part soit E un espace vectoriel de dimension finie n et de base $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$. Alors, on a la proposition suivante :

Proposition 6.2.1 *Soit F l'ensemble des vecteurs x de E dont la matrice des coordonnées $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$ est solution du système homogène $(\mathcal{S}) : AX = 0$. Alors F est un sous-espace vectoriel de E de dimension $n - rg\ (A)$.*

Preuve: Considérons l'application $f : E \longrightarrow \mathbb{R}^p$ définie pour tout vecteur $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$ par :

$$f(x) = (a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n, ..., a_{p1}x_1 + ... + a_{pn}x_n)$$

Alors les coordonnées Y de $f(x)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^p$ sont données par $Y = AX$ et l'on déduit du 2) de la proposition 3.1 du chapitre 3 que f est linéaire et que $F = \text{Ker } (f)$ (en fait A est la matrice de f relativement à la base $\mathcal{B}$ au départ et à la base canonique de $\mathbb{R}^p$ à l'arrivée).

Donc du théorème du rang on déduit que :

$$\dim(F) = \dim(E) - \dim(\text{Im } (f)) = n - \text{rg } (f) = n - \text{rg } (A)$$

$\square$

Remarque 6.2.1 *Supposons que $rg\ (A) = r$. Alors en effectuant un pivot de Gauss sur le système $(\mathcal{S})$ et en supposant que les r premiers pivots se trouvent dans les r premières colonnes, on obtient un nouveau système :*

$$(\mathcal{S}') \Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \cdots \quad \cdots + \alpha_{1r+1}x_{r+1} + \cdots + \alpha_{1n}x_n = 0 \\ \qquad\qquad \alpha_{22}x_2 + \cdots \quad \cdots + \alpha_{2r+1}x_{r+1} + \cdots + \alpha_{2n}x_n = 0 \\ \qquad\qquad\qquad \ddots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \alpha_{rr}x_r + \alpha_{rr+1}x_{r+1} + \cdots + \alpha_{rn}x_n = 0 \end{cases}$$

avec $\alpha_{11}, \cdots, \alpha_{rr}$ non nuls. En prenant $x_1, \cdots, x_r$ comme inconnues principales et $x_{r+1}, \cdots, x_n$ comme inconnues auxiliaires, après résolution du système, on obtient :

$$\begin{cases} x_1 = \beta_{1r+1}x_{r+1} + \cdots + \beta_{1n}x_n \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ x_r = \beta_{rr+1}x_{r+1} + \cdots + \beta_{rn}x_n \end{cases}$$

Donc si $x \in F$, alors :

$$x = x_{r+1}(\beta_{1r+1}e_1 + \cdots + \beta_{rr+1}e_r + e_{r+1}) + x_{r+2}(\beta_{1r+2}e_1 + \cdots + \beta_{rr+2}e_r + e_{r+2}) + \cdots \\ + x_n(\beta_{1n}e_1 + \cdots + \beta_{rn}e_r + e_n)$$

et en posant $u_1 = \beta_{1r+1}e_1 + \cdots + \beta_{rr+1}e_r + e_{r+1}, \cdots, u_{n-r} = \beta_{1n}e_1 + \cdots + \beta_{rn}e_r + e_n$, on voit que $(u_1, \cdots, u_{n-r})$ est une famille génératrice de F mais aussi une base puisque $\dim(F) = n - r$.

6.2.2 De la base au système d'équations

Soit E un espace vectoriel de dimension finie muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$.

Proposition 6.2.2 *Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension p. Alors les coordonnées $(x_1, \cdots, x_n)$ de tout vecteur x de F dans la base $\mathcal{B}$ sont solutions d'un système de $n - p$ équations à n inconnues.*

Preuve: Soit $(u_1, \cdots, u_p)$ une base de F et soit A la matrice de la famille $(u_1, \cdots, u_p)$ dans la base $\mathcal{B}$. Comme rg $(u_1, \cdots, u_p) = p$ puisque $(u_1, \cdots, u_p)$ est une famille libre, on obtient un pivot dans chaque colonne en effectuant un pivot de Gauss sur A. On obtient alors une matrice A' de la forme :

$$A' = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1p} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \alpha_{p-1p} \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_{pp} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

où $\alpha_{11}, \cdots, \alpha_{pp}$ sont non nuls.

D'autre part, du corollaire 2.1 du chapitre 1, on déduit qu'un vecteur x est dans F si et seulement si $(u_1, \cdots, u_p, x)$ est liée, c'est-à-dire si et seulement si rg $(u_1, \cdots, u_p, x) \leqslant p$. En considérant la matrice B de la famille $(u_1, \cdots, u_p, x)$ et en effectuant les mêmes opérations sur les lignes de B que sur les lignes de A pour obtenir A', on obtient une matrice B' de la forme :

$$B' = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1p} & \beta_{11}x_1 + \cdots + \beta_{1n}x_n \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \alpha_{p-1p} & \beta_{p-11}x_1 + \cdots + \beta_{p-1n}x_n \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_{pp} & \beta_{p1}x_1 + \cdots + \beta_{pn}x_n \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \beta_{p+11}x_1 + \cdots + \beta_{p+1n}x_n \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \beta_{n1}x_1 + \cdots + \beta_{nn}x_n \end{pmatrix}$$

Donc d'après ce qui précède, $x \in F$ si et seulement si rg $(B') \leqslant p$, et pour que rg $(B') \leqslant p$, il faut et il suffit que :

$$\begin{cases} \beta_{p+11}x_1 + & \cdots & +\beta_{p+1n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \beta_{n1}x_1 + & \cdots & +\beta_{nn}x_n & = & 0 \end{cases}$$

ce qui achève la preuve.

$\square$