Table des matières

Chapitre 1

Formes linéaires et dualité

1.1 Formes linéaires, espace dual

Dans tout ce chapitre $\mathbb{K}$ désignera un corps commutatif et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (de dimension finie ou non).

Définition 1.1.1 *On appelle* ***forme linéaire*** *sur E toute application linéaire de E dans $\mathbb{K}$. L'espace vectoriel $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ des formes linéaires sur E est aussi noté $E^\star$ et s'appelle* ***espace dual*** *de E.*

Exemples :

1. L'application $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto 2x + y$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^2$.
2. L'application $\theta : E \to K$, $x \mapsto 0$ est une forme linéaire, appelée **forme nulle** sur E.
3. Si $E = \mathbb{K}[X]$ est l'espace des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$, alors pour tout $a \in \mathbb{K}$, l'application $P \mapsto P(a)$ est une forme linéaire sur E.
4. Si $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ est l'espace des fonctions réelles continues sur $[a, b]$, alors l'application $f \mapsto \displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est une forme linéaire sur E.
5. Si $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors l'application trace, $A = (a_{ij}) \mapsto \mathbf{tr}(A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ est une forme linéaire sur E.

Théorème 1.1.1 *Si E est de dimension finie alors $E^\star$ est de dimension finie et* $\dim(E^\star) = \dim(E)$.

PREUVE : En effet comme E et $\mathbb{K}$ sont de dimension finie, $E^\star = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ est de dimension finie et :

$$\dim(\mathcal{L}(E, \mathbb{K})) = \dim(E) \times \dim(\mathbb{K}) = \dim(E)$$

□

1.2 Base duale

Supposons que E est de dimension finie. Soit $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de E. Pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$ définissons les formes linéaires $e_i^\star$ de la façon suivante :

— $e_i^\star(e_j) = 0$ si $i \neq j$.

— $e_i^\star(e_i) = 1$.

On écrira aussi que $e_i^\star(e_j) = \delta_{ij}$ où $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$ et $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$. δ_{ij} s'appelle le **symbole de Kronecker** en (i, j).

Remarquons que cela détermine entièrement chacune des formes linéaires $e_1^\star, \cdots, e_n^\star$. En effet toute application linéaire est entièrement déterminée par les valeurs qu'elle prend sur les vecteurs d'une base donnée. Ce qui revient à dire qu'une application linéaire est entièrement déterminée par sa matrice.

On aurait tout aussi pu définir les formes $e_1^\star, \cdots, e_n^\star$ de la façon suivante : pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$ définissons les formes linéaires $e_i^\star$ telle que :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(e_i^\star) = (0 \cdots 1 \cdots 0)$$

où 1 se trouve à la i-ème place.

À SAVOIR ABSOLUMENT :

Proposition 1.2.1 *Si x est un vecteur de E dont les coordonnées dans $\mathcal{B}$ sont $x_1, \ldots, x_n$ alors pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $e_i^\star(x) = x_i$ et on a ainsi pour tout $x \in E$:*

$$x = \sum_{i=1}^{n} e_i^\star(x) e_i$$

De plus pour toute forme linéaire φ, on a :

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi(e_i) e_i^\star$$

PREUVE : Soit x un vecteur de E de coordonnées $(x_1, \cdots, x_n)$ dans $\mathcal{B}$ et $i \in \{1, \cdots, n\}$. Alors :

$$e_i^\star(x) = e_i^\star\left(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j\right) = \sum_{i=1}^{n} x_j e_i^\star(e_j) = x_i$$

D'autre part :

$$\varphi(x) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \varphi(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(e_i) e_i^\star(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} \varphi(e_i) e_i^\star\right)(x)$$

Cette égalité étant vraie pour tout $x \in E$, on déduit que : $\varphi = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \varphi(e_i) e_i^\star$.

□

Proposition 1.2.2 *$\mathcal{B}^\star := \{e_1^\star, \cdots, e_n^\star\}$ est une base de $E^\star$ et s'appelle la **base duale** de $\mathcal{B}$.*

PREUVE : D'après la proposition pour tout $\varphi \in E^\star$:

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi(e_i) e_i^\star$$

Donc $\mathcal{B}^\star$ est une famille génératrice de $E^\star$.

Or on a vu que $\dim(E^\star) = \dim(E) = n$. Comme $\mathcal{B}^\star$ est une famille génératrice de n vecteurs, on en déduit que $\mathcal{B}^\star$ est une base de $E^\star$.

□

Remarque 1.2.1 *L'application*

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & E & \longrightarrow & E^\star \\ & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i^\star \end{array}$$

est un isomorphisme de E sur $E^\star$.

1.3 Bidual

Définition 1.3.1 *On appelle* **bidual** *de E l'espace dual de $E^\star$, noté $E^{\star\star}$.*

Théorème 1.3.1 *Pour tout $x \in E$ considérons l'application $L(x) : E^\star \longrightarrow \mathbb{K}$ définie pour tout $\varphi \in E^\star$ par $L(x)(\varphi) = \varphi(x)$. Alors $L(x) \in E^{\star\star}$ et si E est de dimension finie, L est un isomorphisme de E sur $E^{\star\star}$.*

PREUVE : Montrons que pour tout $x \in E$, $L(x)$ est linéaire. Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ et $(\varphi, \psi) \in (E^\star)^2$, alors :

$$L(x)(\lambda\varphi + \mu\psi) = (\lambda\varphi + \mu\psi)(x) = \lambda\varphi(x) + \mu\psi(x) = \lambda L(x)(\varphi) + \mu L(x)(\psi)$$

Donc $L(x)$ est une application linéaire de $E^\star$ dans $\mathbb{K}$ et $L(x) \in E^{\star\star}$.

Montrons d'autre part que L est une application linéaire de E dans $E^{\star\star}$. Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ et $(x, y) \in E^2$. Alors pour tout $\varphi \in E^\star$ on a :

$$\begin{aligned} L(\lambda x + \mu y)(\varphi) &= \varphi(\lambda x + \mu y) = \lambda\varphi(x) + \mu\varphi(y) \\ &= \lambda L(x)(\varphi) + \mu L(y)(\varphi) = (\lambda L(x) + \mu L(y))(\varphi) \end{aligned}$$

Cette égalité étant vraie pour tout $\varphi \in E^\star$ on déduit que $L(\lambda x + \mu y) = \lambda L(x) + \mu L(y)$ et L est linéaire.

Maintenant soit $x \in \mathrm{Ker}\ (L)$. Alors $L(x) = 0$. C'est-à-dire que pour tout $\varphi \in E^\star$ on a $L(x)(\varphi) = \varphi(x) = 0$. En particulier si $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ est une base de E et $\mathcal{B}^\star = \{e_1^\star, \ldots, e_n^\star\}$ est sa base duale, on a d'après la proposition 1.2.1, $e_i^\star(x) = x_i = 0$, $x_1, \ldots, x_n$ étant les coordonnées de x dans $\mathcal{B}$. Il s'ensuit que $x = 0$ et que $\mathrm{Ker}\ L = \{0\}$. L est donc injective. Si E est de dimension finie, comme $\dim(E) = \dim(E^\star) = \dim(E^{\star\star})$, L est un isomorphisme.

□

Remarque 1.3.1 *L'isomorphisme Φ de la remarque 1.2.1 dépend de la base choisie dans E tandis que l'isomorphisme L construit dans le théorème 1.3.1 ne dépend pas du choix de la base.*

D'autre part si E est de dimension infinie L n'est plus forcément un isomorphisme.

1.4 Base préduale

Proposition et définition 1.4.1 *Pour toute base $\mathcal{F}$ de $E^\star$, il existe une unique base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathcal{F} = \mathcal{B}^\star$. $\mathcal{B}$ est appelée la base **préduale** ou **anté-duale** de $\mathcal{B}$. On dit que $\mathcal{B}$ et $\mathcal{F}$ sont des bases **duales l'une de l'autre**.*

Preuve : Notons $\mathcal{F} = \{f_1, \cdots, f_n\}$. Considérons $\mathcal{F}^\star = \{f_1^\star, \cdots, f_n^\star\}$ la base duale de $\mathcal{F}$ dans $E^{\star\star}$. Pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$ posons :

$$e_i := L^{-1}(f_i^\star)$$

Comme L est un isomorphisme, $\mathcal{B} := \{e_1, \cdots, e_n\}$ est une base de E. Alors pour tout couple $(i, j) \in \{1, \cdots, n\}^2$ on a :

$$f_i(e_j) = f_i(L^{-1}(f_j^\star)) = L(L^{-1}(f_j^\star))(f_i) = f_j^\star(f_i) = \delta_{ij}$$

Donc $\mathcal{F}$ est la base duale de $\mathcal{B}$.

Supposons maintenant qu'il existe une autre base $\mathcal{B}' = \{e'_1, \cdots, e'_n\}$ telle que $\mathcal{B}'^\star = \mathcal{F}$. Alors pour tout couple $(i, j) \in \{1, \cdots, n\}^2$ on a :

$$f_i(e'_j) = f_i(e_j)$$

Donc :
$$L(e'_j)(f_i) = L(e_j)(f_i)$$
Donc pour tout $\varphi \in E^\star$ et tout $j \in \{1, \cdots, n\}$:
$$L(e'_j)(\varphi) = L(e_j)(\varphi)$$
ce qui revient à dire que $L(e'_j) = L(e_j)$. Comme L est un isomorphisme $e'_j = e_j$ pour tout $j \in \{1, \cdots, n\}$ et $\mathcal{B}' = \mathcal{B}$. □

1.5 Changement de base

À SAVOIR ABSOLUMENT :

Proposition 1.5.1 (Changement de base duale) *Soient $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux bases de E, et soit P la matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_2$. Alors la matrice de passage de $\mathcal{B}_1^*$ à $\mathcal{B}_2^*$ est ${}^tP^{-1}$.*

Remarque 1.5.1 *Si Q est la matrice de passage de $\mathcal{B}_1^*$ à $\mathcal{B}_2^*$, alors la matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_2$ est ${}^tQ^{-1}$.*

Preuve : Posons $\mathcal{B}_1 = \{e_1, \ldots, e_n\}$, $\mathcal{B}_2 = \{f_1, \ldots, f_n\}$ et $P = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, puis notons $Q = (b_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}_1^*$ à $\mathcal{B}_2^*$. Par définition de la matrice de passage on a pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $f_k = \sum_{\ell=1}^{n} a_{\ell k} e_\ell$ et pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $f_j^* = \sum_{i=1}^{n} b_{ij} e_i^*$. Donc pour tout $j, k \in [\![1, n]\!]$:
$$\begin{aligned} \delta_{jk} = f_j^*(f_k) &= \left(\sum_{i=1}^{n} b_{ij} e_i^*\right)\left(\sum_{\ell=1}^{n} a_{\ell k} e_\ell\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} b_{ij} e_i^* \left(\sum_{\ell=1}^{n} a_{\ell k} e_\ell\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} b_{ij} a_{\ell k} e_i^*(e_\ell) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} b_{ij} a_{\ell k} \delta_{i\ell} \\ &= \sum_{i=1}^{n} b_{ij} a_{ik} \\ &= ({}^tQP)_{jk}. \end{aligned}$$
(On rappelle en effet que si on fait le produit de $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ par $B = (b_{jk})_{1\leqslant j,k\leqslant n}$ alors le coefficient c_{ik} de AB vérifie : $c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$).

Donc ${}^tQP = I_n$ et $Q = {}^tP^{-1}$. □

Exemples :

1. Soient les vecteurs $v_1 = (-3, -1, 1)$, $v_2 = (5, 2, -1)$, $v_3 = (6, 2, -1)$ de $\mathbb{R}^3$ exprimés dans la base canonique $\mathcal{B}_0 = \{e_1, e_2, e_3\}$. La famille $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$, puisque la matrice $P = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ est inversible (de déterminant -1). Déterminons sa base duale.
   Soit $\mathcal{B}^* = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ la base duale de $\mathcal{B}$. Alors la matrice de passage de $\mathcal{B}_0^* = \{e_1^*, e_2^*, e_3^*\}$ (base duale de la base canonique) à $\mathcal{B}^*$ est
$$
{}^tP^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
$$
   On conclut donc que
$$
\begin{cases} \varphi_1 & = e_2^* + 2e_3^* \\ \varphi_2 & = -e_1^* + 3e_2^* \\ \varphi_3 & = e_1^* - 2e_2^* + e_3^* \end{cases}
$$
   ou encore
$$
\begin{cases} \varphi_1(x, y, z) & = y + 2z \\ \varphi_2(x, y, z) & = -x + 3y \\ \varphi_3(x, y, z) & = x - 2y + z \end{cases}
$$
2. Soient
$$
\begin{cases} \varphi_1(x, y, z) & = x + 2y + 3z \\ \varphi_2(x, y, z) & = 2x + 3y + 4z \\ \varphi_3(x, y, z) & = 3x + 4y + 6z \end{cases}
$$
   trois formes linéaires sur $\mathbb{R}^3$. Dans la base $\mathcal{B}_0^* = \{e_1^*, e_2^*, e_3^*\}$ elles s'écrivent
$$
\begin{cases} \varphi_1 & = e_1^* + 2e_2^* + 3e_3^* \\ \varphi_2 & = 2e_1^* + 3e_2^* + 4e_3^* \\ \varphi_3 & = 3e_1^* + 4e_2^* + 6e_3^* \end{cases}
$$
   La famille $\mathcal{F} = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ est bien une base de $(\mathbb{R}^3)^*$ puisque la matrice
$$
Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}.
$$
   est inversible. Soit $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ la base de $\mathbb{R}^3$ préduale de $\mathcal{F}$. La matrice de passage de de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}$ est donc
$$
{}^tQ^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.
$$

On conclut donc que $v_1 = (-2, 0, 1)$, $v_2 = (0, 3, -2)$ et $v_3 = (1, -2, 1)$.

1.6 Hyperplans

Définition 1.6.1 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On appelle **hyperplan** de E, le noyau de toute forme linéaire sur E autre que la forme nulle.*

Autrement dit, une partie H de E est un hyperplan de E s'il existe $\varphi \in E^* \setminus \{0\}$ tel que $H = \text{Ker } (\varphi)$. On dit alors que la relation $\varphi(x) = 0$ est une équation de l'hyperplan H.

Exemples :

1. $H = \{A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K});\;\; \mathbf{Tr}(A) = 0\}$ est un hyperplan de $\mathbf{M}_n(\mathbb{K})$.
2. $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\;\; 2x - 3y + z = 0\}$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$.
3. $H = \{P \in \mathbb{K}[X];\;\; P(0) = 0\}$ est un hyperplan de $\mathbb{K}[X]$.

Proposition 1.6.1 *Soit H un sous-espace vectoriel de E. Alors H est hyperplan de E si et seulement si il existe une droite vectorielle D de E telle que $E = H \oplus D$.*

PREUVE : Si H est un hyperplan de E, il existe $\varphi \in E^* \setminus \{0\}$ telle que $H = \text{Ker } (\varphi)$. Puisque φ n'est pas nulle, $H \neq E$. Donc soit $v \in E \setminus H$. Alors $\varphi(v) \neq 0$. Considérons la droite vectorielle $D = \mathbb{K}v$ et montrons que $E = H \oplus D$.

Soit $x \in H \cap D$. Il existe $\lambda \in K$ tel que $x = \lambda v$ et $\varphi(x) = 0$, donc $\lambda\varphi(v) = \varphi(\lambda v) = 0$. Comme $\varphi(v)$ est non nul, on déduit que $\lambda = 0$ et $x = 0$. Ainsi $H \cap D = \{0\}$.

Soit $x \in E$ et montrons que $x \in H + D$. Soit $\lambda = \dfrac{\varphi(x)}{\varphi(v)}$ et posons $y = x - \dfrac{\varphi(x)}{\varphi(v)}v$ qui est un élément de H puisque :

$$\varphi(x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(v)}v) = \varphi(x) - \frac{\varphi(x)}{\varphi(v)}\varphi(v) = 0$$

D'où $x = y + \lambda v \in H + D$.

Réciproquement, supposons qu'il existe une droite vectorielle D telle que $E = H \oplus D$. Il existe $x_0 \in D$ tel que $x_0 \neq 0$. Pour tout $x \in E$, il existe $(\lambda, y) \in \mathbb{K} \times H$ unique tel que $x = \lambda x_0 + y$. Considérons l'application :

$$\begin{array}{rccc} \varphi & : & E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & & x & \longmapsto & \varphi(x) = \lambda \end{array}$$

Alors φ est linéaire. En effet soient x_1 et x_2 deux vecteurs de E et $(\lambda_1, y_1) \in \mathbb{K} \times H$ et $(\lambda_2, y_2) \in \mathbb{K} \times H$ uniques tels que $x_1 = \lambda_1 x_0 + y_1$ et $x_2 = \lambda_2 x_0 + y_2$. Alors étant donné un scalaire α :

$$\alpha x_1 + x_2 = (\alpha\lambda_1 + \lambda_2)x_0 + (\alpha y_1 + y_2)$$

Donc $\varphi(x) = \alpha\lambda_1 + \lambda_2 = \alpha\varphi(x_1) + \varphi(x_2)$, ce qui prouve la linéarité de φ.

Voici une autre façon de faire : $\lambda x_0 = p(x)$ où p est le projecteur sur D parallèlement à H. $\{x_0\}$ étant une base de D, considérons $\{x_0^\star\}$ la base duale de $\{x_0\}$. Alors d'après la proposition 1.1.1, $x_0^\star(\lambda x_0) = \lambda$ et $\varphi(x) = (x_0^\star \circ p)(x)$. La composée de deux applications linéaires étant linéaire, il s'ensuit que φ est linéaire.

Comme $\varphi(x_0) = 1 \neq 0$, $\varphi \in E^\star \setminus \{0\}$ et Ker $(\varphi) = H$. □

Remarque 1.6.1 *La preuve précédente établit que si H est un hyperplan de E alors pour tout $x_0 \in E \setminus H$:*

$$E = H \oplus (\mathbb{K}x_0)$$

Corollaire 1.6.1 *Si E est de dimension finie n, H est hyperplan si et seulement si H est un sous-espace vectoriel de E de dimension $n-1$.*

Corollaire 1.6.2 *Deux formes linéaires non nulles sur un espace vectoriel E sont proportionnelles si et seulement si elles ont le même noyau.*

Preuve : Soient $\varphi, \psi \in E^* \setminus \{0\}$. Supposons que Ker $(\varphi) =$ Ker $(\psi) =: H$. Soit $v \notin H$ (donc $\varphi(v)$ et $\psi(v)$ ne sont pas nuls) . Posons $\alpha = \dfrac{\varphi(v)}{\psi(v)}$ et montrons que $\varphi = \alpha\psi$. Soit $x \in E$, d'après la remarque précédente $E = H \oplus \mathbb{K}v$, donc x s'écrit $x = y + \lambda v$ avec $y \in H$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. D'où $\varphi(x) = \varphi(y) + \lambda\varphi(v) = \lambda\varphi(v) = \lambda(\alpha\psi(v)) = \alpha(\psi(y) + \lambda\psi(v)) = \alpha\psi(x)$. Donc φ et ψ sont proportionnelles.
La réciproque est immédiate. □

Chapitre 2

Formes bilinéaires et formes quadratiques

Dans tout ce chapitre $\mathbb{K}$ est un corps commutatif de caractéristique 0 et E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

2.1 Formes bilinéaires

Définition 2.1.1 *Une application $\varphi : E \times E \to \mathbb{K}$ est une* ***forme bilinéaire*** *sur E si :*

1. *$\forall y \in E$, $\varphi_y : x \mapsto \varphi(x, y)$ est une forme linéaire sur E. On dira aussi que φ est linéaire par rapport à la première place.*
2. *$\forall x \in E$, $\varphi_x : y \mapsto \varphi(x, y)$ est une forme linéaire sur E. On dira aussi que φ est linéaire par rapport à la deuxième place.*

Soient φ une forme bilinéaire sur E, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, $\beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{K}$, $x_1, \ldots, x_n \in E$ et $y_1, \ldots, y_m \in E$. Alors

$$\begin{aligned}\varphi\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i, \sum_{j=1}^{m} \beta_j y_j\right) &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi\left(x_i, \sum_{j=1}^{n} \beta_j y_j\right)\\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sum_{j=1}^{n} \beta_j \varphi(x_i, y_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_i \beta_j \varphi(x_i, y_j).\end{aligned}$$

Remarque 2.1.1

1. *Si φ est une forme bilinéaire sur E, alors $\forall x \in E$, $\varphi(x, 0) = \varphi(0, x) = 0$.*
2. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie n muni d'une base $\mathcal{B}$. Pour tout $(i, j) \in \{1, \cdots, n\}$ tels que $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$, définissons des scalaires a_{ij}. Alors*

l'application φ définie sur $E \times E$ par :

$$\forall (x,y) \in E \times E \ , \ \varphi(x,y) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} a_{ij} x_i y_j$$

où $(x_1, \cdots, x_n)$ et $(y_1, \cdots, y_n)$ sont les coordonnées respectivement de x et y dans la base $\mathcal{B}$, est une forme bilinéaire.
Pour voir que φ est une forme bilinéaire, on peut réécrire l'expression de φ à l'aide de la base duale $\mathcal{B}^\star = \{e_1^\star, \cdots, e_n^\star\}$ de $\mathcal{B}$, ce qui donne :

$$\forall (x,y) \in E \times E \ , \ \varphi(x,y) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} a_{ij} e_i^\star(x) e_j^\star(y)$$

Définition 2.1.2
1. *On appelle **forme bilinéaire symétrique** (fbs) sur E toute forme bilinéaire $\varphi : E \times E \to \mathbb{K}$ vérifiant*
$$\forall x, y \in E, \ \ \varphi(x,y) = \varphi(y,x).$$
2. *On appelle **forme bilinéaire antisymétrique** (fba) sur E toute forme bilinéaire $\varphi : E \times E \to \mathbb{K}$ vérifiant*
$$\forall x, y \in E, \ \ \varphi(x,y) = -\varphi(y,x).$$
3. *On appelle **forme bilinéaire alternée** sur E toute forme bilinéaire $\varphi : E \times E \to \mathbb{K}$ vérifiant*
$$\forall x \in E, \ \ \varphi(x,x) = 0$$

Remarque 2.1.2
1. *Une forme bilinéaire est alternée si et seulement si elle est antisymétrique.*
2. *Une application $\varphi : E \times E \to \mathbb{K}$ est une fbs si et seulement si φ est symétrique et linéaire par rapport à la première (ou la deuxième) place.*

Exemples :
1. Sur $E = \mathbb{R}^n$, pour $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, l'application
$$\varphi(x,y) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i y_i$$
est, d'après la remarque 2.1.1, une forme bilinéaire et elle est symétrique.
2. Si $\ell_1, \ell_2 \in E^*$, alors l'application
$$\varphi(x,y) = \frac{1}{2}(\ell_1(x)\ell_2(y) + \ell_2(x)\ell_1(y))$$
est une fbs sur E.

3. Sur $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, l'application

$$\varphi(f,g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt$$

est une fbs.

4. Sur $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, l'application

$$\varphi(A,B) = \mathrm{tr}\ (AB)$$

est une fbs.

On note $\mathcal{L}^2(E)$ l'ensemble des formes bilinéaires sur E. On notera aussi $\mathcal{S}^2(E)$ l'ensemble des fbs sur E et $\mathcal{A}^2(E)$ l'ensemble des formes bilinéaires antisymétriques sur E.

Remarque 2.1.3 *Pour l'addition habituelle des applications et la multiplication habituelle d'une application par un scalaire, $\mathcal{L}^2(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(E\times E,\mathbb{K})$ (l'ensemble des applications de $E \times E$ dans F).*

De plus $\mathcal{S}^2(E)$ et $\mathcal{A}^2(E)$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{L}^2(E)$. En effet si $\varphi \in \mathcal{L}^2(E)$, notons α et β les formes bilinéaires définies par :

$$\forall (x,y) \in E^2 \quad , \quad \alpha(x,y) = \frac{1}{2}(\varphi(x,y)+\varphi(y,x)) \quad et \quad \beta(x,y) = \frac{1}{2}(\varphi(x,y)-\varphi(y,x))$$

Alors $\alpha \in \mathcal{S}^2(E)$ et $\beta \in \mathcal{A}^2(E)$ et $\varphi = \alpha+\beta$. Ainsi $\mathcal{L}^2(E) = \mathcal{S}^2(E) + \mathcal{A}^2(E)$. Maintenant si $\varphi \in \mathcal{S}^2(E) \cap \mathcal{A}^2(E)$, alors :

$$\forall (x,y) \in E^2 \quad , \quad \varphi(y,x) = \varphi(x,y) = -\varphi(x,y)$$

ce qui entraîne que $\varphi = 0$ et $\mathcal{S}^2(E) \cap \mathcal{A}^2(E) = \{0\}$.

2.2 Formes quadratiques

Définition 2.2.1 *On appelle **forme quadratique** sur E toute application $q : E \to \mathbb{K}$ de la forme*

$$q : x \mapsto \varphi(x,x)$$

*où φ est une forme bilinéaire sur E. q est alors appelée la **forme quadratique associée** à φ.*

L'ensemble des formes quadratiques sur E sera noté $\mathcal{Q}(E)$.

Remarque 2.2.1 *On suppose que E est de dimension finie n et est muni d'une base $\mathcal{B} = \{e_1, \cdots, e_n\}$. Pour tout $(i,j) \in \{1, \cdots, n\}$ tels que $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$ définissons des scalaires a_{ij}. Alors on a vu dans la remarque 2.1.1 que l'application φ définie sur $E \times E$ par :*

$$\forall (x,y) \in E \times E \ , \ \varphi(x,y) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} a_{ij} x_i y_j$$

où $(x_1, \cdots, x_n)$ et $(y_1, \cdots, y_n)$ sont les coordonnées respectivement de x et y dans la base $\mathcal{B}$, est une forme bilinéaire.

La forme quadratique associée q est l'application de E dans $\mathbb{K}$ définie pour tout vecteur $x \in E$ de coordonnées $(x_1, \cdots, x_n)$ dans $\mathcal{B}$ par :

$$q(x) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} a_{ij} x_i x_j$$

Remarque 2.2.2 *A priori, il n'y a pas unicité des formes bilinéaires associées à une forme quadratique. Par exemple sur $\mathbb{R}^2$, les formes bilinéaires $\varphi(x,y) = x_1y_1 + x_2y_2$ et $\psi(x,y) = x_1y_1 + x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_2$ définissent la même forme quadratique $q(x) = \varphi(x,x) = x_1^2 + x_2^2 = \psi(x,x)$.*

L'unicité de φ est assurée par le résultat suivant :

Théorème 2.2.1 *Soit q est une forme quadratique sur E. Alors il existe une unique forme bilinéaire symétrique φ telle que $q(x) = \varphi(x,x)$ pour tout $x \in E$.*

PREUVE : Soit q une forme quadratique. Alors il existe une forme bilinéaire ψ (qui n'est pas forcement symétrique) telle que $q(x) = \psi(x,x)$ pour tout $x \in E$. L'application φ définie sur $E \times E$ par

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{2}[\psi(x,y) + \psi(y,x)]$$

est bilinéaire et symétrique et vérifie $\varphi(x,x) = q(x)$ pour tout $x \in E$, ce qui prouve l'existence de φ.

Réciproquement si φ est une forme bilinéaire symétrique telle que pour tout $x \in E$, $q(x) = \varphi(x,x)$, alors on a pour tout $x, y \in E$:

$$q(x+y) = \varphi(x+y, x+y) = \varphi(x,x) + 2\varphi(x,y) + \varphi(y,y)$$

de sorte que

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{2}[q(x+y) - q(x) - q(y)] \tag{2.1}$$

Cette relation prouve l'unicité de φ. $\square$

Définition 2.2.2 *Soit $q \in \mathcal{Q}(E)$. L'unique forme bilinéaire symétrique φ telle que pour tout $x \in E$, $q(x) = \varphi(x,x)$ s'appelle la **forme polaire** de q.*

Exemples :

1. Pour $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, d'après la remarque 2.2.1 l'application
$$x \mapsto \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2$$
est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ de forme polaire associée
$$(x, y) \mapsto \sum_{i=1}^{n} a_i x_i y_i.$$
2. L'application
$$q : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R},\ P \mapsto \int_0^1 P(t)P''(t)dt$$
est une forme quadratique sur $\mathbb{R}[X]$ de forme polaire
$$(P, Q) \mapsto \frac{1}{2}\int_0^1 (P(t)Q''(t) + P''(t)Q(t))dt.$$

Remarque 2.2.3 *Soit E un espace vectoriel de dimension finie n muni d'une base $\mathcal{B}$. D'après la remarque 2.2.1, l'application q de E dans $\mathbb{K}$ définie pour tout vecteur $x \in E$ de coordonnées $(x_1, \cdots, x_n)$ dans $\mathcal{B}$ par :*
$$q(x) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} a_{ij} x_i x_j$$
est une forme quadratique. Définissons pour tout $(x, y) \in E \times E$ l'application :
$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2}\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} a_{ij}(x_i y_j + x_j y_i) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i y_i + \frac{1}{2}\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} a_{ij}(x_i y_j + x_j y_i)$$
Alors φ est la forme polaire de q.

Proposition 2.2.1 *Soit q une forme quadratique sur E et φ la forme polaire de q. On a :*

1. $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall x \in E,\ q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$.
2. $\forall x, y \in E,\ q(x + y) = q(x) + 2\varphi(x, y) + q(y)$.
3. $\forall x, y \in E,\ q(x - y) = q(x) - 2\varphi(x, y) + q(y)$.
4. $\forall x, y \in E,\ \varphi(x, y) = \frac{1}{2}[q(x + y) - q(x) - q(y)]$.

5. $\forall x, y \in E,\ \varphi(x,y) = \frac{1}{2}\left[q(x) + q(y) - q(x-y)\right]$.
6. $\forall x, y \in E,\ \varphi(x,y) = \frac{1}{4}\left[q(x+y) - q(x-y)\right]$.

Preuve : Il suffit d'expliciter le calcul de $q(x+\lambda y) = \varphi(x+\lambda y, x+\lambda y)$ en tenant compte de la bilinéarité et de la symétrie de φ.

$$\begin{aligned} q(x+\lambda y) &= \varphi(x+\lambda y, x+\lambda y) \\ &= \varphi(x,x) + \lambda\varphi(x,y) + \lambda\varphi(y,x) + \lambda^2\varphi(y,y) \\ &= \varphi(x,x) + 2\lambda\varphi(x,y) + \lambda^2\varphi(y,y). \end{aligned}$$

Tous les points (de 1 à 6) se déduise de cette dernière formule. □

Remarque 2.2.4 1. *$\mathcal{Q}(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(E,\mathbb{K})$ (espace des applications de E dans $\mathbb{K}$). En effet l'application nulle est une forme quadratique et si q et r sont des formes quadratiques, alors pour tout scalaire λ, $q+\lambda r$ est une forme quadratique.*

2. *L'application $\varphi \mapsto q_\varphi$, qui à toute fbs associe la forme quadratique associée, est un isomorphisme de $\mathcal{S}^2(E)$ sur $\mathcal{Q}(E)$.*

   En effet, il est clair que $\varphi \mapsto q_\varphi$ est une bijection de $\mathcal{S}^2(E)$ sur $\mathcal{Q}(E)$. On vérifie aisément que $q_{\varphi+\lambda\psi} = q_\varphi + \lambda q_\psi$.

Proposition 2.2.2 *Soient $\ell_1, \dots, \ell_r$ des formes linéaires sur E et $a_1, \dots, a_r$ des scalaires. Alors $x \mapsto \displaystyle\sum_{i=1}^{r} a_i \ell_i(x)^2$ est une forme quadratique sur E de forme polaire $(x,y) \mapsto \displaystyle\sum_{i=1}^{r} a_i \ell_i(x)\ell_i(y)$.*

Preuve : Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, l'application $(x,y) \mapsto \ell_i(x)\ell_i(y)$ est une fbs. Par linéarité, $(x,y) \mapsto \displaystyle\sum_{i=1}^{r} a_i\ell_i(x)\ell_i(y)$ est une fbs ce qui permet de conclure. □

2.3 Formes positives et définies positives

Dans ce paragraphe, on suppose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
Soit φ une fbs sur E et q la forme quadratique associée.

Définition 2.3.1 1. *On dit que φ ou q est* **positive***, si elle vérifie*

$$\forall x \in E,\ \varphi(x,x) \geqslant 0$$

2. *On dit que φ ou q est* **définie positive***, si elle vérifie*

$$\forall x \in E \setminus \{0\},\ \varphi(x,x) > 0.$$

On note :
$\mathcal{S}_+{}^2(E)$ et $\mathcal{S}_{++}{}^2(E)$ les ensembles des fbs respectivement positives et définies positives.
$\mathcal{Q}_+(E)$ et $\mathcal{Q}_{++}(E)$ les ensembles des fq respectivement positives et définies positives.

Remarque 2.3.1 *1. φ est définie positive si et seulement si elle est positive et si $\forall x \in E$, $\varphi(x,x) = 0 \Rightarrow x = 0$.*

2. Les ensembles $\mathcal{S}_+{}^2(E)$ et $\mathcal{S}_{++}{}^2(E)$ ne sont pas des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{S}(E)$. Ils sont évidemment stables par combinaisons linéaires à coefficients positifs. On dit que ce sont des **cônes convexes**.
De même $\mathcal{Q}_+(E)$ et $\mathcal{Q}_{++}(E)$ sont des cônes convexes.

Exemples :

1. La fbs sur $\mathbb{R}^n$
$$(x,y) \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$
est définie positive.
2. Si $E = \mathcal{CM}([0,1],\mathbb{R})$, l'espace des fonctions continues par morceaux sur $[0,1]$, alors la fbs
$$(f,g) \mapsto \int_0^1 f(t)g(t)dt$$
est positive, mais non définie positive. Sa restriction à $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$, est définie positive.
3. La fbs sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
$$(A,B) \mapsto \mathrm{tr}\ ({}^tAB)$$
est définie positive.

Théorème 2.3.1 (Inégalité de Cauchy-Schwarz) *Soit φ une fbs positive sur E et q la forme quadratique associée. Alors*
$$\forall x,y \in E, \quad [\varphi(x,y)]^2 \leqslant q(x)q(y).$$
Dans le cas où φ est définie positive, on a égalité si et seulement si $\{x,y\}$ est une famille liée dans E.

Preuve : Soit $(x,y) \in E^2$. Soit P l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $P(\lambda) = q(x+\lambda y)$. Alors :
$$0 \leqslant P(\lambda) := q(x+\lambda y) = q(x) + 2\lambda\varphi(x,y) + \lambda^2 q(y)$$
P est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à 2 dont les valeurs sont positives.

— si $q(y) \neq 0$, alors $q(y) > 0$ et le discriminant du trinôme $P(\lambda)$ est $4(\varphi(x,y))^2 - q(x)q(y)) \leqslant 0$. D'où le résultat.
— si $q(y) = 0$, on a $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $P(\lambda) = 2\lambda\varphi(x,y) + q(x) \geqslant 0$. Si $\varphi(x,y) \neq 0$, alors $\lambda \mapsto P(\lambda)$ est une fonction polynomiale de degré un et donc change de signe, d'où $\varphi(x,y) = 0$ et l'inégalité est vérifiée.

Supposons que φ est définie positive. Si les deux vecteurs x, y sont liés, alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $x = \alpha y$ ou $y = \alpha x$. Supposons que $y = \alpha x$. Alors :

$$\varphi(x,y)^2 = \alpha^2\varphi(x,x)^2 = \alpha^2 q(x)^2 = q(x)(\alpha^2 q(x)) = q(x)q(\alpha x) = q(x)q(y).$$

Réciproquement, si $\varphi(x,y)^2 = q(x)q(y)$, alors dans le cas où $q(y) = 0$, on a $y = 0$ et $\{x, y\}$ est liée. Dans le cas où $q(y) \neq 0$, la fonction polynomiale P a un discriminant nul, d'où l'existence de $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tel que $P(\lambda_0) = 0$. Comme $P(\lambda_0) = q(x + \lambda_0 y)$, $x + \lambda_0 y = 0$ puisque φ est définie positive. □

2.4 Forme bilinéaire en dimension finie

Dans ce paragraphe, E est un espace vectoriel de dimension finie n et $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ une base de E.

2.4.1 Matrice d'une forme bilinéaire

Soit φ une forme bilinéaire sur E.

Définition 2.4.1 *On appelle matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$, la matrice*

$$A = Mat_{\mathcal{B}}(\varphi) = (\varphi(e_i, e_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

Proposition 2.4.1 *Soient x et y deux vecteurs de E ayant respectivement pour coordonnées X et Y dans la base $\mathcal{B}$. Alors :*

$$\varphi(x,y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j \varphi(e_i, e_j) = {}^tXAY = {}^tY{}^tAX$$

Preuve : Soit $(x,y) \in E^2$. Alors $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j$. De la bilinéarité de φ on a :

$$\begin{aligned}\varphi(x,y) &= \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\sum_{j=1}^{n} y_j \varphi(e_i, e_j)\right) = \sum_{j=1}^{n} y_j \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \varphi(e_i, e_j)\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j \varphi(e_i, e_j)\end{aligned}$$

X et Y étant les coordonnées respectivement de x et y, alors il est clair que :

$$^tXAY = {}^tY^tAX$$

□

Proposition 2.4.2 *L'application qui à toute forme bilinéaire $\varphi \in \mathcal{L}^2(E)$ associe sa matrice dans une base $\mathcal{B}$ de E est un isomorphisme de $\mathcal{L}^2(E)$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*

Preuve : Soit $\Phi : \mathcal{L}^2(E) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\varphi \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ cette application. Il est clair que Φ est linéaire. De plus, si $\varphi \in \mathrm{Ker}\ (\Phi)$, alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = 0$ et par suite $\varphi = 0$ et donc Φ est injective. D'autre part, si $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, il est clair que

$$(x, y) \mapsto \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{ij} x_i y_j$$

est une forme bilinéaire et pour tout $(k, \ell) \in \{1, \cdots, n\}^2$, $\varphi(e_k, e_\ell) = a_{k\ell}$. Donc $\Phi(\varphi) = A$ et Φ est surjective. □

Proposition 2.4.3 *Soit $\varphi \in \mathcal{L}^2(E)$. Alors :*

1. *φ est une forme bilinéaire symétrique si et seulement si ${}^t\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$.*
2. *φ est une forme bilinéaire antisymétrique si et seulement si ${}^t\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = -\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$.*

Preuve : Si φ est symétrique (resp. antisymétrique) alors pour tout $(i, j) \in \{1, \cdots, n\}^2$: $\varphi(e_i, e_j) = \varphi(e_j, e_i)$ (resp. $\varphi(e_i, e_j) = -\varphi(e_j, e_i)$). Donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ est symétrique (resp. antisymétrique).

Réciproquement si $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ est symétrique (resp. antisymétrique) alors :

$$\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j \varphi(e_i, e_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n y_j x_i \varphi(e_j, e_i) = \varphi(y, x)$$

$$(\text{resp.}\quad \varphi(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j \varphi(e_i, e_j) = -\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n y_j x_i \varphi(e_j, e_i) = -\varphi(y, x)$$

□

Exemple :

1. La forme bilinéaire symétrique associée (dans la base canonique) à la matrice symétrique

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

est

$$\begin{aligned}\varphi(x,y) &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \\ &= 2x_1y_1 - x_1y_2 + x_1y_3 - x_2y_1 + 4x_2y_2 + 3x_2y_3 + x_3y_1 + 3x_3y_2 + 6x_3y_3\end{aligned}$$

et la forme quadratique associée est

$$q(x) = 2x_1^2 + 4x_2^2 + 6x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 6x_2x_3.$$

2. La forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^3$

$$\varphi(x,y) = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_2 - 2x_2y_3 - x_3y_1 - 2x_3y_3$$

a pour matrice dans la base canonique

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Elle n'est donc pas symétrique.

Notons $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ l'espace respectivement des matrices symétriques et des matrices antisymétriques.

Proposition 2.4.4 *1. Les espaces $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{S}^2(E)$ sont isomorphes.*

2. Les espaces $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}^2(E)$ sont isomorphes.

3. De plus $\dim(\mathcal{S}^2(E)) = \dfrac{n(n+1)}{2}$ *et* $\dim(\mathcal{A}^2(E)) = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

Preuve : Les points 1 et 2 sont une conséquence des propositions 2.4.2 et 2.4.3. Soit maintenant $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une matrice symétrique. Alors :

$$A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}E_{ii} + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} a_{ij}(E_{ij} + E_{ji})$$

où pour tout $(i,j) \in \{1, \cdots, n\}^2$ E_{ij} désigne la matrice dont le coefficient de la i-ème ligne et la j-ème colonne est 1 et les autres coefficients sont nuls. $\{E_{ii}\ ;\ i \in \{1, \cdots, n\}\} \cup \{E_{ij} + E_{ji}\ ;\ 1 \leqslant i < j \leqslant n\}$ est une famille génératrice de $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$. On vérifie facilement que c'est aussi une famille libre donc une base de $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$. Il s'ensuit que :

$$\dim(\mathcal{S}_2(E)) = \dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{K})) = n + (n-1) + \cdots + 1 = \frac{n(n+1)}{2}$$

Comme $\mathcal{S}_2(E) \oplus \mathcal{A}_2(E) = \mathcal{L}_2(E)$,

$$\dim(\mathcal{A}_2(E)) = \dim(\mathcal{L}_2(E)) - \dim(\mathcal{S}_2(E)) = n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

□

2.4.2 Matrice d'une forme quadratique

Définition 2.4.2 *On appelle matrice d'une forme quadratique q de E dans la base $\mathcal{B}$ la matrice de la forme polaire de q dans la base $\mathcal{B}$. Cette matrice est notée $Mat_{\mathcal{B}}(q)$.*

Remarque 2.4.1

1. *Si q est une forme quadratique sur E de forme polaire φ, alors pour tout vecteur x de E de coordonnée X dans la base $\mathcal{B}$ on a :*

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j \varphi(e_i, e_j) = {}^tXAX$$

2. *On a vu que l'application q de E dans $\mathbb{K}$ définie pour tout vecteur $x \in E$ de coordonnées $(x_1, \cdots, x_n)$ dans $\mathcal{B}$ par :*

$$q(x) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} a_{ij} x_i x_j$$

est une forme quadratique dont la forme polaire φ est définie pour tout $(x, y) \in E \times E$ par :

$$\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i y_i + \frac{1}{2} \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} a_{ij}(x_i y_j + x_j y_i)$$

Alors $Mat_{\mathcal{B}}(q) = (b_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ où :

$$\forall i \in \{1, \cdots, n\}\ , b_{ii} = a_{ii} \ \textit{et}\ \forall (i,j) \in \{1, \cdots, n\}^2\ ,\ i \neq j\ ,\ b_{ij} = b_{ji} = \frac{1}{2} a_{ij}$$

Exemple : Considérons la forme quadratique définie dans $\mathbb{R}^3$ par :

$$q(x, y, z) = x^2 - 2y^2 + 3z^2 - 6xy + 3xz + 2yz$$

Alors dans la base canonique $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^3$:

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(q) = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3/2 \\ -3 & -2 & 1 \\ 3/2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\varphi)$$

où φ désigne la forme polaire de q et pour tout couple $((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2))$ de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} \varphi((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)) &= \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3/2 \\ -3 & -2 & 1 \\ 3/2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \\ &= x_1x_2 - 2y_1y_2 + 3z_1z_2 - 3x_1y_2 - 3x_2y_1 + \frac{3}{2}x_1z_2 + \frac{3}{2}x_2z_1 + y_1z_2 + y_2z_1 \end{aligned}$$

2.4.3 Changement de base

Théorème 2.4.1 *Soit φ une forme bilinéaire sur E muni de deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. Si P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, alors*

$$Mat_{\mathcal{B}'}(\varphi) = {}^tPMat_{\mathcal{B}}(\varphi)P. \tag{2.2}$$

PREUVE : Soient X et Y (respectivement X' et Y') les matrices colonnes des coordonnées de deux vecteurs x et y dans $\mathcal{B}$ (respectivement $\mathcal{B}'$). Alors $X = PX'$ et $Y = PY'$.

$$\varphi(x, y) = {}^tX\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)Y = {}^tX'({}^tP\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)P)Y' = {}^tX'(\mathrm{Mat}_{\ \mathcal{B}'}(\varphi))Y'$$

De l'unicité de la matrice de φ dans une base, on déduit que ${}^tP\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(\varphi)$. □

Définition 2.4.3 *Le **discriminant** d'une forme bilinéaire φ, dans une base $\mathcal{B} = (e_i)_{1\leq i\leq n}$, est le déterminant de la matrice $A = (\varphi(e_i, e_j))_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ de φ dans cette base. On le note $\Delta_{\mathcal{B}}(\varphi)$.*

Proposition 2.4.5 *Soient φ une forme bilinéaire sur E muni de deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ et P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Alors*

$$\Delta_{\mathcal{B}'}(\varphi) = (\det P)^2\Delta_{\mathcal{B}}(\varphi)$$

PREUVE : C'est une conséquence de la formule (2.2). □

2.5 Orthogonalité, noyau

Dans ce paragraphe E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et φ une forme bilinéaire symétrique de forme quadratique associée q.

2.5.1 Orthogonalité

Définition 2.5.1 *On dit que deux vecteurs $x, y \in E$ sont **orthogonaux** relativement à φ ou encore φ-**orthogonaux** si $\varphi(x, y) = 0$.*

Définition 2.5.2 *Un vecteur $x \in E$ est φ-**orthogonal** à une partie A de E si :*

$$\forall a \in A, \quad \varphi(x, a) = 0.$$

*On appelle **orthogonal** de A (relativement à φ) l'ensemble :*

$$A^{\perp_\varphi} = \{x \in E,\ \forall a \in A,\ :\ \varphi(x, a) = 0\}.$$

On vérifie assez facilement les propriétés suivantes :

Proposition 2.5.1
1. *Pour toute partie $A \subset E$, $A^{\perp_\varphi}$ est un sous-espace vectoriel de E.*
2. *Pour toutes parties A et B de E, on a $A \subset B \Rightarrow B^{\perp_\varphi} \subset A^{\perp_\varphi}$.*
3. *Pour toute partie $A \subset E$, $A^{\perp_\varphi} = (\mathrm{Vect(A)})^{\perp_\varphi}$.*
4. *$\{0_E\}^{\perp_\varphi} = E$.*
5. *Pour tout sous-espace vectoriel F de E, on a $F \subset (F^{\perp_\varphi})^{\perp_\varphi}$.*

PREUVE :

1. Soit A une partie de E. Alors pour tout $a \in A$, $\varphi(0, a) = 0$. Donc $0 \in A^{\perp_\varphi}$. Soient maintenant $(x, y) \in A^{\perp_\varphi}$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. Alors pour tout $a \in A$, on a :
$$\varphi(\alpha x + y, a) = \alpha\varphi(x, a) + \varphi(y, a) = 0$$
Il s'ensuit que $A^{\perp_\varphi}$ est un sous-espace vectoriel.
2. Supposons que A et B sont deux parties de E telles que $A \subset B$. Soit $x \in B^{\perp_\varphi}$, alors pour tout $b \in B$, $\varphi(x, b) = 0$. Comme $A \subset B$, pour tout $a \in A$, $\varphi(x, a) = 0$ ce qui implique que $x \in A^{\perp_\varphi}$. Donc $B^{\perp_\varphi} \subset A^{\perp_\varphi}$.
3. Soit une partie $A \subset E$. Rappelons que Vect(A) est l'ensemble des combinaisons linéaires finies de vecteurs de A. Autrement dit :
$$\begin{aligned}\mathrm{Vect}(A) := \{x \in E \ ;\ \exists k \in \mathbb{N}^\star \ ;\ \exists(x_1, \cdots, x_k) \in A^k \ ,\\ \exists(\lambda_1, \cdots, \lambda_k) \in \mathbb{K}^k \ ;\ x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i\}\end{aligned}$$
On a évidemment $A \subset \mathrm{Vect}(A)$. Donc $\mathrm{Vect}(A)^{\perp_\varphi} \subset A^{\perp_\varphi}$.

   Réciproquement si $x \in A^{\perp_\varphi}$, alors pour tout $a \in A$, $\varphi(x, a) = 0$. Si $b = \sum_{i=1}^{k} \lambda_k a_k$ où $k \in \mathbb{N}^\star$, $(a_1, \cdots, a_k) \in A^k$ et $(\lambda_1, \cdots, \lambda_k) \in \mathbb{K}^k$, alors :
$$\varphi(x, b) = \varphi\left(x, \sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \varphi(x, a_i) = 0$$
Donc $x \in \mathrm{Vect}(A)^{\perp_\varphi}$ et $A^{\perp_\varphi} \subset \mathrm{Vect}(A)^{\perp_\varphi}$. Ce qui prouve que $A^{\perp_\varphi} = (\mathrm{Vect(A)})^{\perp_\varphi}$.
4. Évident.
5. Soit F un sous-espace vectoriel. Soit $x \in F$. Alors pour tout $y \in F^{\perp_\varphi}$ on $\varphi(x, y) = 0$ (puisque y étant un vecteur de $F^{\perp_\varphi}$, pour tout $a \in F$, $\varphi(a, y) = 0$). Donc $x \in (F^{\perp_\varphi})^{\perp_\varphi}$. On a prouvé que $F \subset (F^{\perp_\varphi})^{\perp_\varphi}$.

□

Définition 2.5.3 *On dit qu'un vecteur $x \in E$ est **isotrope** relativement à φ s'il est orthogonal à lui même : $\varphi(x,x) = 0$. L'ensemble des vecteurs isotropes de E, relativement à φ, est appelé **cône isotrope** de φ (ou de q). On le note :*

$$C_\varphi = C_q = \{x \in E \ : q(x) = \varphi(x,x) = 0\}$$

Remarque 2.5.1 *Attention ! En général, le cône isotrope n'est pas un sous-espace vectoriel de E.*

2.5.2 Noyau

Définition 2.5.4 *On appelle **noyau** de la fbs φ le sous-espace vectoriel*

$$\text{Ker } (\varphi) = E^{\perp_\varphi} = \{x \in E, \ \forall y \in E, \ : \ \varphi(x,y) = 0\}.$$

On dit aussi que Ker (φ) est le noyau de la forme quadratique et on le note aussi Ker (q).

Proposition 2.5.2 *Le noyau de φ est contenu dans son cône isotrope, soit*

$$\text{Ker } (\varphi) \subset C_\varphi$$

Preuve : Immédiat. □

Exemple : On considère la fbs sur $\mathbb{R}^3$

$$\varphi(x,y) = x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3.$$

$x \in$ Ker (φ) signifie que $\varphi(x,y) = 0$ pour tout $y \in \mathbb{R}^3$ et en particulier pour les vecteurs de la base canonique e_1, e_2, e_3 et par suite $0 = \varphi(x,e_1) = x_1$, $0 = \varphi(x,e_2) = x_2$ et $0 = \varphi(x,e_3) = -x_3$. On en déduit que Ker $(\varphi) = \{0\}$.
Le cône isotrope C_φ de φ est formé des vecteurs x tels que $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$. Il n'est pas difficile de voir que C_φ n'est pas un sous-espace vectoriel. En effet $(1,0,1) \in C_\varphi$ et $(0,1,1) \in C_\varphi$. Pourtant $(1,0,1) + (0,1,1) = (1,1,2) \notin C_\varphi$.

Définition 2.5.5 *On dit que la fbs φ est **dégénérée** (respectivement **non dégénérée**) si* Ker $(\varphi) \neq \{0\}$ *(respectivement* Ker $(\varphi) = \{0\}$*).*

Autrement dit φ est non dégénérée si et seulement si $\varphi(x,y) = 0$ pour tout $y \in E$ implique $x = 0$.

Définition 2.5.6 *On dit que q est* ***définie*** *si $C_q = \{0\}$.*

Proposition 2.5.3 *Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et si q est définie alors q ou $-q$ est définie positive.*

PREUVE : Supposons par l'absurde qu'il existe $(x_0, y_0) \in E^2$ tel que $q(x_0)q(y_0) < 0$. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $t \mapsto f(t) = q((1-t)x_0 + ty_0)$. Alors $f(0) = q(x_0)$ et $f(1) = q(y_0)$ et $f(0)f(1) < 0$. D'autre part pour tout $t \in [0,1]$:

$$f(t) = (1-t)^2 q(x_0) + 2(1-t)t\varphi(x_0, y_0) + t^2 q(y_0)$$

où φ désigne la forme polaire de q. f est donc continue sur $[0,1]$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique $t_0 \in]0,1[$ tel que $f(t_0) = q((1-t_0)x_0 + t_0 y_0) = 0$. Donc $(1-t_0)x_0 + t_0 y_0 = 0$ car q est définie. Donc $(1-t_0)x_0 = -t_0 y_0$ et donc :

$$q((1-t_0)x_0) = q(-t_0 y_0) \Leftrightarrow (1-t_0)^2 q(x_0) = t_0^2 q(y_0)$$

d'où :

$$(1-t_0)^2 q(x_0) t_0^2 q(y_0) > 0 \Leftrightarrow q(x_0)q(y_0) > 0$$

ce qui constitue une contradiction. □

2.5.3 Rang

Dans cette section, on suppose que E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Soient $\mathcal{B} = \{e_1, \cdots, e_n\}$ une base de E et A la matrice de φ dans $\mathcal{B}$.

Définition 2.5.7 *On appelle* **rang** *de φ (ou q) l'entier noté $\mathrm{rg}(\varphi)$ (ou $\mathrm{rg}\ (q)$), défini par :*

$$\mathrm{rg}(\varphi) = \dim(E) - \dim(\mathrm{Ker}\ (\varphi)).$$

Théorème 2.5.1 *Soit u l'endomorphisme de E ayant A pour matrice dans la base $\mathcal{B}$. On a :*

1. $\mathrm{Ker}\ (\varphi) = \mathrm{Ker}\ (u)$
2. $\mathrm{rg}(\varphi) = \mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(u)$.
3. *φ est non dégénérée* $\iff \mathrm{rg}(\varphi) = n \iff A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

Preuve : Soit $x \in E$ et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ la matrice colonne formée des coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$. Notons $E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, E_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$. $\{E_1, \cdots, E_n\}$ est la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. On a :

$$\begin{aligned} x \in \text{Ker } (\varphi) \iff \forall y \in E,\ \varphi(x,y) = 0 &\iff \forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\ {}^tXAY = 0 \\ &\iff \forall i \in \{1, \cdots, n\},\ {}^tXAE_i = 0 \\ &\iff {}^tXA = 0 \\ &\iff AX = 0 \\ &\iff X \in \text{Ker } (A) \\ &\iff x \in \text{Ker } (u) \end{aligned}$$

D'où le point 1. Les points 2 et 3 découlent du théorème du rang. En effet :

$$\text{rg } (\varphi) = \dim(E) - \dim(\text{Ker } (\varphi)) = \dim(E) - \dim(\text{Ker } (u)) = \text{rg } (u) = \text{rg } (A)$$

□

2.6 Réduction des formes quadratiques

2.6.1 Bases orthogonales et orthonormales

Dans tout ce paragraphe on suppose que E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.

Définition 2.6.1 *Soit q une forme quadratique sur E de forme polaire φ. Alors :*

1. *Une base $\mathcal{B}$ de E est dite φ-**orthogonale** ou q-**orthogonale** si ses vecteurs sont deux à deux φ-orthogonaux. Autrement dit :*

$$\forall (i,j) \in \{1, \cdots, n\}^2 \quad ; \quad i \neq j \quad , \quad \varphi(e_i, e_j) = 0$$

2. *Une base $\mathcal{B}$ de E est dite φ-**orthonormale** ou q-**orthonormale** si :*

$$\forall (i,j) \in \{1, \cdots, n\}^2 \quad , \quad \varphi(e_i, e_j) = \delta_{ij}$$

Remarque 2.6.1
1. *$\mathcal{B}$ est φ-orthogonale si et seulement si $Mat_{\mathcal{B}}(\varphi)$ est diagonale.*
2. *$\mathcal{B}$ est φ-orthonormale si et seulement si $Mat_{\mathcal{B}}(\varphi) = I_n$.*

Théorème 2.6.1 (Théorème de réduction des fbs) *Pour toute fbs φ sur E, il existe une base de E qui est φ-orthogonale.*

Preuve : Si $\varphi = 0$, alors toute base de E est φ-orthogonale.

Supposons donc que $\varphi \neq 0$. On fait une récurrence sur la dimension de E. Si $n = 1$ toute base est φ-orthogonale. Soit $n \geqslant 1$. On suppose l'affirmation du théorème vraie pour tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Prouvons que l'affirmation reste vraie au rang $n + 1$.

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n + 1$ et φ une fbs sur E.

Comme $\varphi \neq 0$, il existe $e_1 \in E$ tel que $q(e_1) \neq 0$ (car sinon, $q = 0$ et d'après la remarque 2.2.4, comme l'application qui à toute fbs associe la forme quadratique associée est un isomorphisme de $\mathcal{S}^2(E)$ sur $\mathcal{Q}(E)$ cela implique que $\varphi = 0$ ce qui n'est pas le cas). Soit $F = \mathbb{K}e_1$. Alors :

$$F^\perp = \{x \in E \ ; \ \varphi(x, e_1) = 0\} = \mathrm{Ker}\ (f)$$

où f est la forme linéaire définie sur E par :

$$\forall x \in E \ , \ f(x) = \varphi(x, e_1)$$

Comme $f(e_1) \neq 0$, $\mathrm{Im}\ (f) = \mathbb{K}$ et $\mathrm{rg}\ (f) = 1 = \dim(F)$, donc d'après le théorème du rang :

$$\dim(F^\perp) + \dim(F) = \dim(\mathrm{Ker}\ (f)) + \mathrm{rg}\ (f) = \dim(E) = n + 1$$

De plus $F \cap F^\perp = \{0\}$ car si $x \in F \cap F^\perp$ alors $x = \lambda e_1$ et $\varphi(x, e_1) = \lambda q(e_1) = 0$ ce qui entraîne $\lambda = 0$, puisque $q(e_1) \neq 0$. Donc $E = F \oplus F^\perp$. Considérons la restriction $\varphi_{|F^\perp}$ de φ à $F^\perp$. Par hypothèse de récurrence comme $\dim(F^\perp) = n$, il existe une base $\{e_2, \ldots, e_{n+1}\}$ de $F^\perp$ qui est $\varphi_{|F^\perp}$-orthogonale. Donc pour tous $i, j \in \{2, \ldots, n + 1\}$ et $i \neq j$, $\varphi(e_i, e_j) = 0$.

Soit $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_{n+1}\}$. Comme F et $F^\perp$ sont supplémentaires dans E, $\mathcal{B}$ est une base de E et elle est φ-orthogonale. □

Corollaire 2.6.1 *Pour toute matrice symétrique $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$, il existe une matrice inversible $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et une matrice diagonale D telles que $D = {}^tPAP$.*

Preuve : Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$. Notons $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Soit φ l'unique forme bilinéaire symétrique de $\mathbb{K}^n$ telle que $\mathrm{Mat}_{\ \mathcal{C}}(\varphi) = A$. Soit $\mathcal{B}$ une base de E qui est φ-orthogonale. Alors d'après le théorème 2.4.1, si on note P la matrice de passage de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{B}$ et $D = \mathrm{Mat}_{\ \mathcal{B}}(\varphi)$, alors :

$$D = {}^tPAP$$

Et comme $\mathcal{B}$ est φ-orthogonale, D est diagonale. □

Remarque 2.6.2 *1. Les éléments diagonaux de D ne sont pas nécessairement les valeurs propres de A.*

2. *D'après le théorème 2.5.1 on a vu que pour toute base $\mathcal{B}$,* $\mathrm{rg}\ (\varphi) = \mathrm{rg}\ (Mat_{\mathcal{B}}(\varphi))$. *Or le rang d'une matrice diagonale est égal au nombre d'éléments diagonaux non nuls. Il s'ensuit que si $\mathcal{B}$ est φ-orthogonale alors* $\mathrm{rg}\ (\varphi)$ *est le nombre d'éléments diagonaux non nuls.*

Proposition 2.6.1 *Soient $r \in \{1, \cdots, n\}$, $\ell_1, \cdots, \ell_r$ des formes linéaires linéairement indépendantes et $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ des scalaires non nuls. Alors, la forme quadratique q définie pour tout $x \in E$ par :*

$$q(x) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \ell_i(x)^2$$

est de rang r. De plus :

$$\mathrm{Ker}\ (q) = \bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{Ker}\ (\ell_i)$$

Preuve : Complétons la famille $\{\ell_1, \cdots, \ell_r\}$ par des formes linéaires $\{\ell_{r+1}, \cdots, \ell_n\}$ pour obtenir une base de $E^{\star}$. Soit $\mathcal{B} := \{e_1, \cdots, e_n\}$ la base préduale de $\{\ell_1, \cdots, \ell_n\}$. Comme la forme polaire φ vérifie :

$$\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \ell_i(x) \ell_i(y)$$

Il s'ensuit que $\mathcal{B}$ est une base φ-orthogonale. En effet :

$$\varphi(e_j, e_k) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \ell_i(e_j) \ell_i(e_k) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \delta_{ij} \delta_{ik}$$

car $\{\ell_1, \cdots, \ell_n\}$ est la base duale de $\{e_1, \cdots, e_n\}$. Donc $\varphi(e_j, e_k) = 0$ si $j \neq k$ et $\varphi(e_j, e_k) = 1$ si $j = k$. D'après la remarque précédente, comme $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ sont non nuls $\mathrm{rg}\ (q) = r$.

D'autre part $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k = \sum_{k=1}^{n} \ell_k(x) e_k \in \bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{Ker}\ (\ell_i)$ si et seulement si $x \in \mathrm{Vect}\{e_{r+1}, \cdots, e_n\}$.

Donc $\bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{Ker}\ (\ell_i) = \mathrm{Vect}\{e_{r+1}, \cdots, e_n\}$ et :

$$\dim \left(\bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{Ker}\ (\ell_i) \right) = n - r$$

Or si $x \in \bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{Ker}\ (\ell_i)$ alors $\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \ell_i(x) \ell_i(y) = 0$ pour tout $y \in E$ donc $x \in \mathrm{Ker}\ (q)$ et :

$$\bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{Ker}\ (\ell_i) \subset \mathrm{Ker}\ (q)$$

Comme $\dim(\mathrm{Ker}\,(q)) = n - \mathrm{rg}\,(q) = n - r$, les deux sous-espaces sont égaux. □

Remarque 2.6.3 *La base $\mathcal{B} = \{e_1, \cdots, e_n\}$ construite dans la preuve précédente est q-orthogonale et :*

$$Mat_{\mathcal{B}}(q) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & O & \\ & & \lambda_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & O & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

2.6.2 Classification des formes quadratiques en dimension finie

Théorème 2.6.2 *Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie n. Pour toute forme quadratique $q \in \mathcal{Q}^2(E)$ de rang r, il existe r formes linéaires $\ell_1, \cdots, \ell_r$ linéairement indépendantes telles que :*

$$\forall x \in E \quad , \quad q(x) = \sum_{i=1}^{r} \ell_i(x)^2$$

Preuve : Soit φ la forme polaire de q. Alors il existe une base orthogonale $\mathcal{B} = \{e_1, \cdots, e_n\}$ de E telle que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ O & \ddots & O \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

D'après le point 2. de la remarque 2.6.2 r est le nombre d'éléments diagonaux non nuls. On peut alors supposer que $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ sont non nuls et dans ce cas :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & O & \\ & & \lambda_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & O & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Pour tout $x \in E$, notons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ les coordonnées de x dans $\mathcal{B}$. Alors :

$$q(x) = {}^t\text{XMat}_{\mathcal{B}}(\varphi)X = \begin{pmatrix} x_1 \cdots x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 x_1 \\ \vdots \\ \lambda_r x_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i^2 = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i (e_i^\star(x))^2$$

où $\{e_1^\star, \cdots, e_n^\star\}$ est la base duale de $\mathcal{B}$. Comme $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ sont des complexes, il existe $\mu_1, \cdots, \mu_r$ tels que pour tout $i \in \{1, \cdots, r\}$, $\mu_i^2 = \lambda_i$. Posons maintenant pour tout $i \in \{1, \cdots, r\}$:

$$\ell_i = \mu_i e_i^\star$$

Alors on a bien :

$$\forall x \in E \quad , \quad q(x) = \sum_{i=1}^{r} \ell_i(x)^2$$

□

Corollaire 2.6.2 *Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie n. Si q est une forme quadratique non dégénérée sur E, alors il existe une base de E q-orthonormale.*

Théorème 2.6.3 (Loi d'inertie de Sylvester) *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n. Pour toute forme quadratique $q \in \mathcal{Q}^2(E)$ de rang r, il existe r formes linéaires $\ell_1, \cdots, \ell_r$ linéairement indépendantes et un entier $p \in \{1, \cdots, r\}$ telles que :*

$$\forall x \in E \quad , \quad q(x) = \sum_{i=1}^{p} \ell_i(x)^2 - \sum_{i=p+1}^{r} \ell_i(x)^2$$

De plus p ne dépend que de q.

PREUVE : De manière similaire à la preuve précédente, il existe une base $\mathcal{B} = \{e_1, \cdots, e_n\}$ telle que :

$$q(x) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i (e_i^\star(x))^2$$

avec $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ non nuls. Quitte à faire une permutation des vecteurs de base, on peut supposer que $\lambda_1, \cdots, \lambda_p > 0$ et $\lambda_{p+1}, \cdots, \lambda_r < 0$. Notons pour $i \in \{1, \cdots, p\}$:

$$\ell_i = \sqrt{\lambda_i} e_i^\star$$

et pour $i \in \{p+1, \cdots, r\}$:

$$\ell_i = \sqrt{-\lambda_i} e_i^\star$$

Alors on a :

$$q(x) = \sum_{i=1}^{p} (\sqrt{\lambda_i} e_i^\star(x))^2 - \sum_{i=p+1}^{r} (\sqrt{-\lambda_i} e_i^\star(x))^2 = \sum_{i=1}^{p} \ell_i(x)^2 - \sum_{i=p+1}^{r} \ell_i(x)^2$$

Montrons maintenant que p ne dépend que de q. Supposons qu'il existe r formes linéaires $\ell'_1, \cdots, \ell'_r$ linéairement indépendantes et un entier $p \in \{1, \cdots, r\}$ tels que :

$$\forall x \in E \quad , \quad q(x) = \sum_{i=1}^{p'} \ell'_i(x)^2 - \sum_{i=p'+1}^{r} \ell'_i(x)^2$$

Complétons $\{\ell_1, \cdots, \ell_r\}$ par des vecteurs $\ell_{r+1}, \cdots, \ell_n$ pour obtenir une base de $E^\star$. De même complétons $\{\ell'_1, \cdots, \ell'_r\}$ par des vecteurs $\ell'_{r+1}, \cdots, \ell'_n$ pour obtenir une base de $E^\star$. Notons $\mathcal{B} = \{\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n\}$ et $\mathcal{B}' = \{\varepsilon'_1, \cdots, \varepsilon'_n\}$ les bases préduales respectivement de $\{\ell_1, \cdots, \ell_n\}$ et de $\{\ell'_1, \cdots, \ell'_n\}$. Soient $F = \mathrm{Vect}\{\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p\}$, $F' = \mathrm{Vect}\{\varepsilon'_1, \cdots, \varepsilon'_{p'}\}$, $G = \mathrm{Vect}\{\varepsilon_{p+1}, \cdots, \varepsilon_n\}$ et $G' = \mathrm{Vect}\{\varepsilon'_{p'+1}, \cdots, \varepsilon'_n\}$. Alors pour tout $x \in F \setminus \{0\}$ de coordonnées $(x_1, \cdots, x_n)$ dans $\mathcal{B}$:

$$q(x) = \sum_{i=1}^{p} x_i^2 > 0$$

et pour tout $x \in G'$ de coordonnées $(x'_1, \cdots, x'_n)$ dans $\mathcal{B}'$:

$$q(x) = -\sum_{i=p'+1}^{n} {x'_i}^2 < 0$$

Donc $F \cap G' = \{0\}$. Donc :

$$\dim F + \dim G' = \dim(F \oplus G') \leqslant n = \dim F' + \dim G'$$

Donc $\dim F \leqslant \dim F'$ et $p \leqslant p'$. De la même manière on montre que $p' \leqslant p$. Finalement $p = p'$. $\square$

Définition 2.6.2 *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n. Soit q une forme quadratique sur E de rang r. Le couple $(p, r-p)$ du théorème ci-dessus s'appelle la **signature** de q.*

Corollaire 2.6.3 *Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n et q une forme quadratique sur E de rang r. Alors :*

1. *q est positive (resp. négative) si et seulement si sa signature est $(r, 0)$ (resp. $(0, r)$).*
2. *q est définie positive (resp. définie négative) si et seulement si sa signature est $(n, 0)$ (resp. $(0, n)$).*

Preuve : Soit q une forme quadratique de signature $(p, r-p)$. Alors on sait qu'il existe r formes linéaires $\ell_1, \cdots, \ell_r$ linéairement indépendantes telles que :

$$\forall x \in E \quad , \quad q(x) = \sum_{i=1}^{p} \ell_i(x)^2 - \sum_{i=p+1}^{r} \ell_i(x)^2$$

On complète $\{\ell_1, \cdots, \ell_r\}$ par $\{\ell_{r+1}, \cdots, \ell_n\}$ pour obtenir une base de $E^\star$. Soit $\{e_1, \cdots, e_n\}$ la base préduale de $\{\ell_1, \cdots, \ell_n\}$.

1. Si q est positive et si la signature de q est $(p, r-p)$ avec $r - p > 0$, alors $q(e_{p+1}) = -1 < 0$ ce qui constitue une contradiction. Donc $p = r$. La réciproque est immédiate.
2. Si q est définie positive, alors d'après le premier point la signature de q est $(r, 0)$. Si $r < n$, alors $q(e_{r+1}) = 0$ ce qui constitue une contradiction. Donc $r = n$.

   Réciproquement si la signature de q est $(n, 0)$, alors q est positive et si x est un vecteur tel que $q(x) = 0$, alors :

   $$\ell_1(x) = \cdots = \ell_n(x) = 0$$

   Donc les coordonnées de x dans la base $\{e_1, \cdots, e_n\}$ sont nulles, donc $x = 0$.

□

Corollaire 2.6.4 *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n. Si q est une forme quadratique définie positive sur E, alors il existe une base de E q-orthonormale.*

Preuve : En effet, la base $\{e_1, \cdots, e_n\}$ est orthonormale (voir la remarque 2.6.3). □

2.6.3 Méthode de Gauss de réduction en carrés

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) de dimension finie n muni d'une base $\mathcal{B} = \{e_1, \cdots, e_n\}$. Pour tout vecteur x, on notera $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ la matrice des coordonnées de x.

Soit q une forme quadratique non nulle sur E et $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ sa matrice dans la base $\mathcal{B}$. Par définition A est la matrice de la forme polaire de q, elle est donc symétrique et on a :

$$\begin{aligned}
q(x) = {}^{t}XAX &= \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{ij}x_ix_j \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_{ij}x_ix_j + \sum_{1\leqslant j<i\leqslant n} a_{ij}x_ix_j \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_{ij}x_ix_j
\end{aligned}$$

D'après les théorèmes 2.6.2 et 2.6.3, si q est de rang r, il existe r formes linéaires $\ell_1, \cdots, \ell_r$ linéairement indépendantes telles que :

$$\forall x \in E \quad , \quad q(x) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \ell_i(x)^2$$

où $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ sont des scalaires non nuls (dans le théorème 2.6.2, les formes linéaires ont été normalisées pour avoir $\lambda_1 = \cdots = \lambda_r = 1$ et dans le théorèmes 2.6.3, elles ont été normalisées pour avoir pour tout $i \in \{1, \cdots, r\}$, $\lambda_i = 1$ ou -1).

Nous allons décrire la méthode de Gauss permettant de trouver ces formes linéaires. Celle-ci repose essentiellement sur les deux identités suivantes

$$x^2 + 2xu = (x+u)^2 - u^2 \tag{2.3}$$

et

$$xy = \frac{1}{4}(x+y)^2 - \frac{1}{4}(x-y)^2 \tag{2.4}$$

Il s'agit d'éliminer successivement les variables, en commençant par toutes celles qui apparaissent avec un carré, qu'on élimine une à une, puis toutes les autres qu'on élimine par deux.

Si $n = 1$, alors $q(x) = a_{11}x_1^2$. Il n'y a rien à faire.

Supposons maintenant que $n \geqslant 2$.

1. **Premier cas.** Supposons que l'expression 2.3 contient au moins un terme carré, c'est-à-dire qu'il existe un indice i tel que $a_{ii} \neq 0$. Quitte à faire une permutation sur les vecteurs de la base, on peut supposer que $a_{11} \neq 0$. En regroupant les termes contenant x_1, on écrit :

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1^2 + 2\sum_{j=2}^{n} a_{1j}x_1x_j &= \frac{1}{a_{11}}\left(a_{11}^2x_1^2 + 2a_{11}x_1\sum_{j=2}^{n} a_{1j}x_j\right) \\
&= \frac{1}{a_{11}}\left(\left(a_{11}x_1 + \sum_{j=2}^{n} a_{1j}x_j\right)^2 - \left(\sum_{j=2}^{n} a_{1j}x_j\right)^2\right)
\end{aligned}$$

et donc :

$$\begin{aligned} q(x) &= \frac{1}{a_{11}}\left(a_{11}x_1 + \sum_{j=2}^{n} a_{1j}x_j\right)^2 + q'(x') \\ &= \tfrac{1}{a_{11}}\ell_1^2(x) + q'(x') \end{aligned}$$

où $\ell_1 = a_{11}e_1^\star + \sum_{j=2}^{n} a_{1j}e_j^\star$ et q' une forme quadratique définie sur le sous-espace vectoriel F engendré par $e_2, \ldots, e_n$ et $x' = x_2e_2 + \cdots + x_ne_n = \pi(x)$, π étant le projecteur sur F parallèlement à $\mathbb{R}e_1$.
Si $q' = 0$, on a $q = a_{11}\ell_1^2$ avec a_{11} et ℓ_1 non nuls.
Si $q' \neq 0$, alors il existe un entier $p \in [\![2, n]\!]$, des scalaires non nuls $\lambda_2, \ldots, \lambda_p$ et des formes linéaires linéairement indépendantes $\ell'_2, \ldots, \ell'_p$ sur F tels que :

$$\forall x' \in F,\ \ q'(x') = \sum_{j=2}^{p} \lambda_j \ell'^2_j(x')$$

et en considérant pour tout $j \in [\![2, p]\!]$ les formes linéaires $\ell_2 = \ell'_2 \circ \pi, \ldots, \ell_p = \ell'_p \circ \pi$ définies sur E, on a :

$$q(x) = \frac{1}{a_{11}}\ell_1^2(x) + \sum_{j=2}^{p} \lambda_j \ell_j^2(x)$$

ce qui donne la décomposition demandée à condition de montrer que les formes $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n$ sont linéairement indépendantes.
Si $\sum_{j=1}^{p} \alpha_j \ell_j = 0$, alors pour tout $x \in E$, $\sum_{j=1}^{p} \alpha_j \ell_j(x) = 0$. Pour $x = e_1$, on a $\alpha_1\ell_1(x) = \alpha_1 a_{11} = 0$. Comme $a_{11} \neq 0$, on déduit que $\alpha_1 = 0$ et $\sum_{j=2}^{p} \alpha_j \ell_j = 0$. Pour tout $x \in F$, $\sum_{j=2}^{p} \alpha_j \ell_j(x) = \sum_{j=2}^{p} \alpha_j \ell'_j(x) = 0$. Comme la famille $\ell'_2, \ldots, \ell'_p$ est libre sur F, on a $\alpha_2 = \ldots = \alpha_p = 0$.

2. **Deuxième cas.** Supposons que q est sans terme carré, c'est-à-dire que tous les coefficients (diagonaux) a_{ii} sont nuls. Autrement dit :

$$q(x) = 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} a_{ij}x_ix_j$$

Comme q est non nulle, il existe deux indices $i < j$ tels que $a_{ij} \neq 0$. Quitte à faire une permutation sur les vecteurs de la base, on peut supposer que $a_{12} \neq 0$. Si $n = 2$, alors :

$$q(x) = 2a_{12}x_1x_2 = \frac{2}{a_{12}}L_1(x)L_2(x)$$

où $L_1 = a_{21}e_1^\star$ et $L_2 = a_{12}e_2^\star$. Si $n \geqslant 3$, en regroupant les termes contenant x_1 et x_2, on écrit :

$$\begin{aligned}
a_{12}x_1x_2 + x_1\sum_{j=3}^{n} a_{1j}x_j + x_2\sum_{j=3}^{n} a_{2j}x_j \\
&= \frac{1}{a_{12}}\left(a_{12}x_1a_{12}x_2 + a_{12}x_1\sum_{j=3}^{n} a_{1j}x_j + a_{12}x_2\sum_{j=3}^{n} a_{2j}x_j\right) \\
&= \frac{1}{a_{12}}\left(a_{12}x_1 + \sum_{j=3}^{n} a_{2j}x_j\right)\left(a_{12}x_2 + \sum_{j=3}^{n} a_{1j}x_j\right) \\
&\quad - \frac{1}{a_{12}}\left(\sum_{j=3}^{n} a_{1j}x_j\right)\left(\sum_{j=3}^{n} a_{2j}x_j\right)
\end{aligned}$$

Donc :

$$q(x) = \frac{2}{a_{12}}L_1(x)L_2(x) + q'(x')$$

où $L_1 = a_{21}e_1^\star + \sum_{j=3}^{n} a_{2j}e_j^\star$ et $L_2 = a_{12}e_2^\star + \sum_{j=3}^{n} a_{1j}e_j^\star$ et q' est une forme quadratique définie sur le sous-espace vectoriel F de E engendré par $e_3, \ldots, e_n$ et $x' = x_3e_3 + \ldots + x_ne_n = \pi(x)$, π étant le projecteur sur F parallèlement à $\mathrm{Vect}\{e_1, e_2\}$. On a :

$$L_1(x)L_2(x) = \frac{1}{4}(L_1(x) + L_2(x))^2 - \frac{1}{4}(L_1(x) - L_2(x))^2$$

Posons alors dans le cas $n = 2$ et $n \geqslant 3$:

$$\ell_1 = L_1 + L_2 \quad \text{et} \quad \ell_2 = L_1 - L_2$$

Comme L_1 et L_2 ne sont pas colinéaires, $\{L_1, L_2\}$ est une famille libre. Les formes ℓ_1 et ℓ_2 appartiennent à $\mathrm{Vect}\{L_1, L_2\}$ et la matrice de $\{\ell_1, \ell_2\}$ dans $\{L_1, L_2\}$ est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Son déterminant étant non nul, ℓ_1 et ℓ_2 sont linéairement indépendantes.
Si $n = 2$ ou si $q' = 0$ pour $n \geqslant 3$ alors on a $q(x) = \dfrac{1}{2a_{12}}(\ell_1^2(x) - \ell_2^2(x))$ et les formes ℓ_1 et ℓ_2 sont linéairement indépendantes.
Si $q' \neq 0$, il existe un entier un entier $p \in [\![3, n]\!]$, des scalaires non nuls $\lambda_3, \ldots, \lambda_p$ et des formes linéaires indépendantes ${\ell'}_3, \ldots, {\ell'}_p$ sur F tels que

$$\forall x' \in F, \;\; q'(x') = \sum_{j=3}^{p} \lambda_j {\ell'}_j^2(x')$$

et en considérant pour tout $j \in [\![3,p]\!]$ les formes linéaires $\ell_3 = \ell'_3 \circ \pi, \dots, \ell_p = \ell'_p \circ \pi$ définies sur E, on a :

$$q(x) = \frac{1}{2a_{12}}\ell_1^2(x) - \frac{1}{2a_{12}}\ell_2^2(x) + \sum_{j=3}^{p} \lambda_j \ell_j^2(x)$$

ce qui donne la décomposition demandée à condition de montrer que les formes $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_p$ sont indépendantes.
Si $\sum_{j=1}^{p} \alpha_j \ell_j = 0$ pour tout $x \in E$, $\sum_{j=1}^{p} \alpha_j \ell_j(x) = 0$. En particulier pour $x = e_1$ et $x = e_2$, on obtient $\ell_1(e_1) = \ell_2(e_1) = a_{12}$, $\ell_1(e_2) = -\ell_2(e_2) = a_{12}$ et :

$$a_{12}(\alpha_1 + \alpha_2) = 0 \quad \text{et} \quad a_{12}(\alpha_1 - \alpha_2) = 0$$

Donc $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ et $\sum_{j=3}^{p} \alpha_j \ell_j = 0$. Pour tout $x \in F$, $\sum_{j=3}^{p} \alpha_j \ell_j(x) = \sum_{j=3}^{p} \alpha_j \ell'_j(x) = 0$.
Comme la famille $\ell'_3, \dots, \ell'_p$ est libre sur F, on a $\alpha_3 = \ldots = \alpha_p = 0$.

Exemples :

1. Soit q la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^4$ par :

$$q(x) = x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_1x_4 + x_2x_3 + 4x_2x_4 + 2x_3x_4$$

Il n'y a pas de carré. Le coefficient devant x_1x_2 étant non nul. Si on suit la méthode décrite dans le deuxième cas on a :

$$\begin{aligned}
q(x) &= x_1x_2 + x_1(2x_3 + 2x_4) + x_2(x_3 + 4x_4) + 2x_3x_4 \\
&= (x_1 + x_3 + 4x_4)(x_2 + 2x_3 + 2x_4) - (x_3 + 4x_4)(2x_3 + 2x_4) + 2x_3x_4 \\
&= (x_1 + x_3 + 4x_4)(x_2 + 2x_3 + 2x_4) - 2x_3^2 - 8x_4^2 - 8x_3x_4 \\
&= (x_1 + x_3 + 4x_4)(x_2 + 2x_3 + 2x_4) - 2(x_3 + 2x_4)^2 \\
&= \tfrac{1}{4}(x_1 + x_2 + 3x_3 + 6x_4)^2 - \tfrac{1}{4}(x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4)^2 - 2(x_3 + 2x_4)^2 \\
&= \tfrac{1}{4}\ell_1(x)^2 - \tfrac{1}{4}\ell_2(x)^2 - 2\ell_3(x)^2
\end{aligned}$$

où à l'avant dernière ligne on a utilisé 2.5. Les formes ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 sont indépendantes. La forme quadratique est donc de signature $(1,2)$ et de rang 3. Par conséquent son noyau est de dimension 1 et il est caractérisé par $\ell_1(x) = 0$, $\ell_2(x) = 0$ et $\ell_3(x) = 0$ d'après la proposition 2.6.1. On trouve alors le sous-espace vectoriel engendré par le vecteur $(2, -2, 2, -1)$.

2. Soit q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$ donnée par :

$$q(x) = -x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3.$$

Le coefficient devant x_1^2 est non nul. En utilisant la formule (2.4) on a :

$$\begin{aligned} q(x) &= -(x_1^2 - 2x_1(x_2 + x_3)) - x_2^2 - x_3^2 + 2x_2x_3 \\ &= -(x_1 - x_2 - x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 - x_2^2 - x_3^2 + 2x_2x_3 \\ &= -(x_1 - x_2 - x_3)^2 + 4x_2x_3 \end{aligned}$$

Ensuite on utilise la formule (2.5) pour x_2x_3 :

$$\begin{aligned} q(x) &= -(x_1 - x_2 - x_3)^2 + 4x_2x_3 \\ &= -(x_1 - x_2 - x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 - (x_2 - x_3)^2 \\ &= -\ell_1(x)^2 + \ell_2(x)^2 - \ell_3(x)^2. \end{aligned}$$

Les trois formes linéaires ℓ_1, ℓ_2 et ℓ_3 sont linéairement indépendantes. La forme quadratique q est donc de signature $(1, 2)$ et de rang 3. Il s'ensuit que $\dim \mathrm{Ker}\ (q) = 0$ et $\mathrm{Ker}\ (q) = \{0\}$.

Chapitre 3

Espaces préhilbertiens réels

Dans tout ce chapitre E désigne un espace vectoriel réel non nul.

3.1 Produit scalaire, norme

Définition 3.1.1 *On appelle* ***produit scalaire*** *sur E toute fbs définie positive. Un* ***espace préhilbertien*** *est un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire.*

Si E est un espace préhilbertien, le produit scalaire de deux vecteurs x et y sera noté $\langle x, y\rangle$.

Exemples :

1. Sur $\mathbb{R}^n$ la fbs :
$$(x, y) \mapsto \langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$
est un produit scalaire appelé **produit scalaire canonique**. En effet, il s'agit bien d'une fbs. Pour $x \in \mathbb{R}^n$, on a $\langle x, x\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geqslant 0$ avec $\langle x, x\rangle = 0$ si et seulement si $x = 0_{\mathbb{R}^n}$.
2. **Produit scalaire canonique** sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:
$$(A, B) \mapsto \langle A, B\rangle = \mathbf{tr}({}^t AB).$$
L'application est bien une fbs. De plus si $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, alors $\langle A, A\rangle = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{ij}^2 \geqslant 0$ avec $\langle A, A\rangle = 0$ si et seulement si $a_{ij} = 0$ pour tout $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, soit $A = 0$.
3. Produit scalaire sur $\mathcal{L}_c^2(I, \mathbb{R})$, espace des fonctions continues sur un intervalle I et de carrée intégrable :

L'ensemble

$$\mathcal{L}_c^2(I,\mathbb{R}) = \{f : I \to \mathbb{R},\ \text{continue},\ \int_I f(t)^2 dt < +\infty\}$$

est bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(I,\mathbb{R})$, puisque pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et pour tout $f, g \in \mathcal{L}_c^2(I,\mathbb{R})$, on a $(\lambda f + g)^2 \leqslant 2((\lambda f)^2 + g^2)$, donc $\int_I (\lambda f + g)^2 dt < +\infty$. On considère l'application

$$(f,g) \mapsto \langle f, g\rangle = \int_I f(t)g(t)dt.$$

Elle est bien définie, car si $f, g \in \mathcal{L}_c^2(I,\mathbb{R})$, on a $|fg| \leqslant \frac{1}{2}(f^2 + g^2)$, donc $\int_I fg dt \leqslant \frac{1}{2}\int_I f^2 dt + \frac{1}{2}\int_I g^2 dt < +\infty$.
Il est clair que $(f,g) \mapsto \langle f, g\rangle$ est une fbs positive. De plus si $\langle f, f\rangle = 0$, alors $\int_I f(t)^2 dt = 0$. Or $t \mapsto f(t)^2$ est continue et positive sur I, donc $f(t)^2 = 0$ pour tout $t \in I$ et par suite $f \equiv 0$ sur I. On en déduit $\langle f, g\rangle = \int_I f(t)g(t)dt$ est un produit scalaire sur $\mathcal{L}_c^2(I,\mathbb{R})$.

Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace préhilbertien. Pour tout $x \in E$, on note désormais :

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

Rappelons l'inégalité de Cauchy-Schwarz déjà montrée au chapitre 2, dans le cadre d'un produit scalaire :

Théorème 3.1.1 (Inégalité de Cauchy-Schwarz) *Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace préhilbertien.*

$$\forall x, y \in E,\ \ [\langle x, y\rangle]^2 \leqslant \|x\|^2\|y\|^2$$

On a égalité si et seulement si $\{x, y\}$ est une famille liée dans E.

Théorème 3.1.2 (Inégalité de Minkowski) *Pour tout $x, y \in E$, on a :*

$$\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|.$$

L'égalité étant réalisée si et seulement si $x = 0$ ou $x \neq 0$ et $y = \lambda x$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^+$ (i.e. x et y positivement liés).

PREUVE : On a :

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2 \\ &\leqslant \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 \quad \text{(Inégalité de Cauchy-Schwarz)} \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2\end{aligned}$$

Ce qui donne l'inégalité souhaitée.

L'égalité a lieu si et seulement si $\langle x, y\rangle = \|x\|\|y\|$. Dans ce cas $\{x, y\}$ est liée. Soit $x = 0$, soit $x \neq 0$ et $y = \lambda x$. Mais alors $\lambda\|x\|^2 = |\lambda|\|x\|^2$ donc $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Réciproquement si $x = 0$ ou $x \neq 0$ et $y = \lambda x$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^+$ alors $\langle x, y\rangle = \|x\|\|y\|$ et l'égalité a lieu. □

Définition 3.1.2 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $N : E \to \mathbb{R}$ une application vérifiant $\forall (x, y) \in E^2$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$:*

1. *$N(x) \geqslant 0$, $N(x) = 0 \Rightarrow x = 0$.*
2. *$N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$.*
3. *$N(x + y) \leqslant N(x) + N(y)$.*

*Alors N s'appelle une **norme** sur E et tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni d'une norme s'appelle **espace vectoriel normé**.*

Proposition 3.1.1 *Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace préhilbertien. Alors l'application :*

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \|x\| \end{array}$$

est une norme sur E.

Proposition 3.1.2 *Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace préhilbertien. Pour tous $x, y \in E$, on a l'identité du parallélogramme :*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

3.2 Orthogonalité

Relativement au produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$ qui est une forme bilinéaire symétrique on rappelle que :

1. x et y sont orthogonaux si $\langle x, y\rangle = 0$.
2. Pour toute partie A de E, $A^\perp = \{x \in E\ ;\ \forall a \in A\ ,\ \langle x, a\rangle = 0\}$.
3. La famille $\{u_i\}_{i \in I}$ est orthogonale (resp. orthonormale) si :

$$\forall (i, j) \in I^2\ ,\ i \neq j\ ,\ \langle u_i, u_j\rangle = 0$$

$$(\text{resp. }, \forall (i, j) \in I^2\ ,\ \langle u_i, u_j\rangle = \delta_{ij})$$

Remarque 3.2.1 *Si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E muni d'une base $\mathcal{B}$, alors un vecteur x est orthogonal à F si et seulement si tous les vecteurs de $\mathcal{B}$ sont orthogonaux à x. En effet l'application $y \mapsto \langle x, y\rangle$ est linéaire sur F, nulle sur F si et seulement si elle est nulle sur $\mathcal{B}$.*

Exemple : Dans $\mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire canonique, on considère :

$$F = \left\{ x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4;\ \left\{ \begin{array}{l} 3x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_4 = 0 \end{array} \right. \right\}.$$

C'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et

$$\mathcal{B} = \{v_1 = (1, 2, -1, 1), v_2 = (0, 1, 1, 2)\}.$$

en est une base. Soit $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$, alors

$$\begin{aligned} x \in F^\perp &\Longleftrightarrow x \perp v_1, \text{ et } x \perp v_2 \\ &\Longleftrightarrow \langle x, v_1\rangle = 0, \text{ et } \langle x, v_2\rangle = 0 \\ &\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Ainsi

$$F^\perp = \left\{ x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4;\ \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \end{array} \right. \right\}.$$

Théorème 3.2.1 (de Pythagore)

1. *Deux vecteurs $x, y \in E$ sont orthogonaux si et seulement si :*

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

2. *Si $\{x_1, \dots, x_n\}$ est une famille orthogonale de vecteurs de E, alors :*

$$\|x_1 + \cdots x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \cdots \|x_n\|^2.$$

PREUVE :

1. On a $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2$, donc $x \perp y$ ssi $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.
2. On a :

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\|^2 &= \left\langle \sum_{i=1}^n x_i, \sum_{j=1}^n x_j \right\rangle \\ &= \sum_{l=1}^n \|x_i\|^2 + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \langle x_i, x_j\rangle. \end{aligned}$$

Comme pour $i \neq j$, $\langle x_i, x_j\rangle = 0$, donc $\left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\|^2 = \sum_{l=1}^n \|x_i\|^2$.

□

Corollaire 3.2.1 *Une famille orthogonale de vecteurs non nuls de E est libre.*

PREUVE : Soit $\{x_1, \cdots, x_n\}$ une famille orthogonale de vecteurs non nuls de E et soit $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ des scalaires tels que :

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = 0$$

Alors :

$$0 = \left\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \|x_i\|^2$$

Ce qui entraîne pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$, $\lambda_i \|x_i\| = 0$, mais comme les vecteurs $x_1, \cdots, x_n$ sont non nuls, $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$ et $\{x_1, \cdots, x_n\}$ est libre.

□

Les propriétés de la proposition suivante ne sont pas difficiles à établir. Leur démonstration est laissée aux lecteurs.

Proposition 3.2.1
1. *Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors $F \cap F^{\perp} = \{0_E\}$.*
2. *$E^{\perp} = \{0_E\}$. Autrement dit*

$$(\forall y \in E,\ \langle x, y \rangle = 0) \Rightarrow x = 0_E$$

3. *$F \subset F^{\perp\perp}$.*

Remarque 3.2.2 *Attention ! sans hypothèse supplémentaire il n'est pas possible de montrer que $F = F^{\perp\perp}$.*

Définition 3.2.1 *Deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont dits* ***orthogonaux****, et on notera $F \perp G$ si :*

$$\forall (x, y) \in F \times G \quad , \quad \langle x, y \rangle = 0$$

Remarque 3.2.3 *Attention : Deux sous-espaces sont orthogonaux ne signifie pas forcément que l'un est l'orthogonal de l'autre. Par exemple dans $\mathbb{R}^3$ deux droites orthogonales ne signifie pas que l'une est l'orthogonal de l'autre, puisque l'orthogonal d'une droite est un plan.*

Remarque 3.2.4 *Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels, il y a équivalence entre :*
- *F et G sont orthogonaux.*
- *$F \subset G^{\perp}$.*
- *$G \subset F^{\perp}$.*

Définition 3.2.2 *Soit F un sous-espace vectoriel de E. On dit que F admet un* ***supplémentaire orthogonal*** *dans E si $E = F \oplus F^{\perp}$.*

Proposition 3.2.2 *Soient F et G deux sous-espaces supplémentaires de E tels que F et G sont orthogonaux. Alors F admet un supplémentaire orthogonal et $G = F^{\perp}$.*

PREUVE : De manière évidente on a $G \subset F^{\perp}$. Montrons maintenant que $F^{\perp} \subset G$. Soit $x \in F^{\perp}$, alors il existe $(y, z) \in F \times G$ tel que $x = y + z$. Donc :

$$\|y\|^2 = \langle x, y\rangle - \langle z, y\rangle = 0$$

Donc $y = 0$ et $x \in G$. Donc $F^{\perp} = G$. □

Corollaire 3.2.2 *Soit F un sous-espace vectoriel de E admettant un supplémentaire orthogonal. Alors $F^{\perp\perp} = F$.*

Définition 3.2.3 *On dit qu'une famille $F_1, \ldots, F_p$ de sous-espaces vectoriels de E est* ***orthogonale*** *si et seulement si $F_i \perp F_j$ pour tout $i \neq j$.*

Proposition 3.2.3 *Toute famille orthogonale de sous-espaces vectoriels de E est en somme directe.*

PREUVE : Soit $F_1, \ldots, F_p$ une famille orthogonale de sous-espaces vectoriels de E et soit $(x_1, \ldots, x_p) \in F_1 \times \cdots \times F_p$ tels que $x_1 + \ldots + x_p = 0$. D'après Pythagore, $0 = \|x_1 + \ldots + x_p\|^2 = \|x_1\|^2 + \ldots + \|x_p\|^2$, donc $x_1 = \ldots = x_p = 0$. □

On notera alors $F_1 + \ldots + F_p = F_1 \oplus^{\perp} \cdots \oplus^{\perp} F_p$ et on dira qu'on a une **somme directe orthogonale**.

3.2.1 Projecteurs et symétries orthogonales

Dans ce paragraphe $(E, \langle\ \ ,\ \ \rangle)$ est un espace préhilbertien. On rappelle que p est un projecteur s'il existe deux sous-espaces vectoriels F et G supplémentaires dans E tel que p est l'application de E dans E définie de la façon suivante : pour tout $x \in E$, $p(x)$ est l'unique vecteur de E tel que $p(x) \in F$ et $x - p(x) \in G$. On dit alors que p est le projecteur sur F parallèlement à G. L'application $q = \mathrm{Id}_E - p$ est alors le projecteur sur G parallèlement à F.

p et q sont des endomorphismes de E et :

1. $p \circ p = p$, $p \circ q = q \circ p = 0$ et $q \circ q = q$.
2. Im $(p) = F$ et Ker $(p) = G$.

Réciproquement, si p un endomorphisme de E vérifiant $p \circ p = p$, alors Ker p et Im p sont supplémentaires dans E et p est le projecteur sur Im p parallèlement à Ker p.

Un endomorphisme s est une symétrie par rapport à F parallèlement à G si l'endomorphisme $p = \frac{1}{2}(s + \mathrm{Id}_E)$ est le projecteur sur F parallèlement à G.

s est une symétrie si et seulement si $s \circ s = \mathrm{Id}_E$.

Définition 3.2.4 *Soit F un sous-espace vectoriel de E admettant un supplémentaire orthogonal $F^\perp$.*

1. *On appelle **projecteur orthogonal** sur F, le projecteur noté p_F sur F parallèlement à $F^\perp$.*
2. *On appelle **symétrie orthogonale** par rapport à F notée s_F, la symétrie par rapport à F parallèlement à $F^\perp$.*

Remarque 3.2.5

1. *On a évidemment* Ker $(p_F) = F^\perp$ *et Im $(p_F) = F$ et $p_F = \frac{1}{2}(s_F + Id_E)$.*
2. *On a vu que si F admet un supplémentaire orthogonal, alors $F^\perp$ admet un supplémentaire orthogonal qui est F. Donc on peut parler du projecteur orthogonal $p_{F^\perp}$ sur $F^\perp$ et pour tout $x \in E$, on a :*

$$x = p_F(x) + p_{F^\perp}(x) \quad et \quad s_F(x) = p_F(x) - p_{F^\perp}(x)$$

3. *Des relations ci-dessus on déduit que* Ker $(s_F - Id_E) =$ Ker $(p_{F^\perp}) = F^{\perp\perp} = F$. *Donc si s est une symétrie orthogonale, alors s est une symétrie orthogonale par rapport à* Ker $(s - Id_E)$.

Définition 3.2.5 *Soient A une partie non vide de E et $x \in E$. On appelle **distance** de x à A le réel :*

$$d(x, A) := \inf\{\|x - y\| \ ; \ y \in A\}$$

Théorème 3.2.2 *Soient F un sous-espace vectoriel de E et $x \in E$.*

1. *S'il existe $y_0 \in F$ tel que $d(x, F) = \|x - y_0\|$, alors y_0 est unique.*
2. *Un vecteur y_0 de F vérifie $d(x, F) = \|x - y_0\|$ si et seulement si $x - y_0 \in F^\perp$.*
3. *On suppose que F admet un supplémentaire orthogonal. Alors :*

$$d(x, F) = \|x - p_F(x)\| = \|p_{F^\perp}(x)\| = \sqrt{\|x\|^2 - \|p_F(x)\|^2}$$

Preuve :

1. Soient y_0 et z_0 tels que $d(x, F) = \|x - y_0\| = \|x - z_0\|$. En appliquant l'identité du parallélogramme à $x - y_0$ et $x - z_0$ on a :

$$\|2x - y_0 - z_0\|^2 + \|z_0 - y_0\|^2 = 2(\|x - y_0\|^2 + \|x - z_0\|^2) = 4d(x, F)^2$$

Donc :

$$0 \leqslant \frac{1}{4}\|z_0 - y_0\|^2 = d(x, F)^2 - \left\|x - \frac{1}{2}(y_0 + z_0)\right\|^2 \leqslant 0$$

car $(y_0, z_0) \in F^2$ et $\frac{1}{2}(y_0 + z_0) \in F$. D'où $y_0 = z_0$.

2. Si $y_0 \in F$ et vérifie $d(x, F) = \|x - y_0\|$, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^{*,+}$ et tout $y \in F$, $y_0 - \lambda y \in F$ et :

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \|x - y_0 + \lambda y\|^2 - d(x, F)^2 &= \|x - y_0 + \lambda y\|^2 - \|x - y_0\|^2 \\ &= \lambda^2\|y\|^2 + 2\lambda\langle x - y_0, y\rangle \\ &= \lambda(\lambda\|y\|^2 + 2\langle x - y_0, y\rangle) \end{aligned}$$

En simplifiant par λ puis en faisant tendre λ vers 0, on a pour tout $y \in F$, $\langle x - y_0, y\rangle \geqslant 0$ ce qui implique que pour tout $y \in F$, $\langle x - y_0, y\rangle = 0$. Donc $x - y_0 \in F^\perp$.

Réciproquement si $y_0 \in F$ et $x - y_0 \in F^\perp$, alors pour tout $z \in F$ on a :

$$\begin{aligned} \|x - z\|^2 - \|x - y_0\|^2 &= \|(x - y_0) + (y_0 - z)\|^2 - \|x - y_0\|^2 \\ &= 2\langle x - y_0, y_0 - z\rangle + \|y_0 - z\|^2 \\ &= \|y_0 - z\|^2 \geqslant 0 \end{aligned}$$

Donc pour tout $z \in F$, $\|x - y_0\| \leqslant \|x - z\|$ et $\|x - y_0\| = d(x, F)$.

3. Par hypothèse $E = F \oplus F^\perp$. Soit $x \in E$. Alors :

$$x = p_F(x) + p_{F^\perp}(x)$$

Donc $x - p_F(x)$ est orthogonal à F et comme $p_F(x) \in F$, d'après 2. :

$$d(x, F) = \|x - p_F(x)\| = \|p_{F^\perp}(x)\|$$

et comme $\|x\|^2 = \|p_F(x)\|^2 + \|p_{F^\perp}(x)\|^2$, on trouve la deuxième égalité.

□

3.3 Espaces Euclidiens

Définition 3.3.1 *Un* ***espace euclidien*** *est un espace préhilbertien de dimension finie.*

3.3.1 Bases orthonormales et orthogonalité

Dans le cas où E est de dimension finie n, on peut dire qu'un produit scalaire sur E est la forme polaire d'une forme quadratique de signature $(n, 0)$.

On rappelle qu'une base $\{e_i\}_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une base orthonormale pour le produit scalaire si :

$$\forall (i,j) \in \{1 \leqslant i \leqslant n\}^2 \ , \ \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$$

Comme conséquence immédiate du corollaire 2.6.4 on a le théorème suivant.

Théorème 3.3.1 *Il existe une base orthonormale dans E.*

Remarque 3.3.1 *Si $\{e_1, \cdots, e_n\}$ est une base orthonormale de E, alors pour tout $x \in E$, on a :*

$$x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i$$

Si $x, y \in E$ on peut écrire

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle \langle y, e_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = {}^t XY$$

où les x_i et y_i sont les coordonnées de x et y respectivement dans la base $\mathcal{B}$ et X et Y les matrices coordonnées respectivement de x et y dans cette base. On a aussi

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle x; e_i \rangle^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

Proposition 3.3.1 *Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace pré-hilbertien $(E, \langle\ ,\ \rangle)$. Alors F admet un supplémentaire orthogonal dans E.*

Preuve : On sait déjà d'après la proposition 3.2.1 que F et $F^{\perp}$ sont en somme directe. Soit $\{e_1, \cdots, e_p\}$ une base orthonormale de F et soit $x \in E$, alors :

$$x = \sum_{i=1}^{p} \langle x, e_i \rangle e_i + \left(x - \sum_{i=1}^{p} \langle x, e_i \rangle e_i \right)$$

Soit $y \in F$. Alors $y = \sum_{i=1}^{p} \langle y, e_i \rangle e_i$ et :

$$\begin{aligned}
\langle x - \sum_{i=1}^{p} \langle x, e_i \rangle e_i, \sum_{j=1}^{p} \langle y, e_j \rangle e_j \rangle &= \sum_{j=1}^{p} \langle x, e_j \rangle \langle y, e_j \rangle - \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant p} \langle x, e_i \rangle \langle y, e_j \rangle \langle e_i, e_j \rangle \\
&= \sum_{j=1}^{p} \langle x, e_j \rangle \langle y, e_j \rangle - \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant p} \langle x, e_i \rangle \langle y, e_j \rangle \delta_{ij} \\
&= 0
\end{aligned}$$

On en conclut que $x - \sum_{i=1}^{p} \langle x, e_i \rangle e_i \in F^{\perp}$ et $x \in F + F^{\perp}$ ce qui achève la preuve. □

Corollaire 3.3.1 *Si $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ est un espace euclidien, alors pour tout sous-espace vectoriel F de E, on a $F^{\perp\perp} = F$.*

Corollaire 3.3.2 *Si $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ est un espace euclidien de dimension n, alors pour toute famille orthonormale $\{e_1, \cdots, e_p\}$ de E il existe des vecteurs $e_{p+1}, \cdots, e_n$ tels que $\{e_1, \cdots, e_n\}$ soit une base orthonormale de E.*

Corollaire 3.3.3 *Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace préhilbertien E et $\{e_1, \cdots, e_p\}$ une base orthonormée de F. Alors F admet un supplémentaire orthogonal et pour tout $x \in E$:*

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} \langle x, e_i \rangle e_i$$

Preuve : On a :

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} \langle p_F(x), e_i \rangle e_i = \sum_{i=1}^{p} \langle p_F(x) - x, e_i \rangle e_i + \sum_{i=1}^{p} \langle x, e_i \rangle e_i$$

Or d'après la remarque 3.2.5, $p_F(x) - x = -p_{F^{\perp}}(x) \in F^{\perp}$ ce qui donne le résultat souhaité. □

3.3.2 Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Théorème 3.3.2 (Orthonormalisation de Gram-Schmidt) *Pour toute base $\mathcal{B} := \{u_i\}_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de E, il existe une unique base orthonormale $\mathcal{B}_o := \{e_i\}_{1 \leqslant i \leqslant n}$ dans E telle que*

$$\forall k \in \{1, \ldots, n\}\ , \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{Vect}\{e_1, \ldots, e_k\} = \mathrm{Vect}\{u_1, \ldots, u_k\} \\ \langle u_k, e_k \rangle > 0 \end{array} \right. \tag{3.1}$$

Preuve : On procède par récurrence sur k. $\mathcal{B}$ étant une base $u_1 \neq 0$ et $\|u_1\| \neq 0$. Posons $e_1 := \dfrac{u_1}{\|u_1\|}$. Alors $\langle u_1, e_1 \rangle > 0$ et $\mathrm{Vect}\{e_1\} = \mathrm{Vect}\{u_1\}$. De plus $\{e_1\}$ est une famille orthonormale.

Soit maintenant $p \in \{1, \cdots, n-1\}$ et supposons qu'il existe une famille orthonormale $\{e_1, \cdots, e_p\}$ telle que :

$$\forall k \in \{1, \ldots, p\}\ , \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{Vect}\{e_1, \ldots, e_k\} = \mathrm{Vect}\{u_1, \ldots, u_k\} \\ \langle u_k, e_k \rangle > 0 \end{array} \right. \tag{3.2}$$

Montrons que ceci est encore vrai au rang $p+1$. Soit :

$$v_{p+1} = u_{p+1} - \sum_{k=1}^{p} \langle u_{p+1}, e_k \rangle e_k$$

Comme $\mathcal{B}$ est une base, $u_{p+1} \notin \text{Vect}\{u_1, \cdots, u_p\} = \text{Vect}\{e_1, \cdots, e_p\}$ ce qui entraîne que $v_{p+1} \neq 0$. Donc en posant $e_{p+1} := \dfrac{v_{p+1}}{\|v_{p+1}\|}$ on a :

$$\text{Vect}\{e_1, \cdots, e_p, e_{p+1}\} = \text{Vect}\{e_1, \cdots, e_p, u_{p+1}\} = \text{Vect}\{u_1, \cdots, u_p, u_{p+1}\}$$

De plus $\|e_{p+1}\| = 1$ et pour tout $j \in \{1, \cdots, p\}$ on a :

$$\langle e_{p+1}, e_j \rangle = \frac{1}{\|v_{p+1}\|} \langle v_{p+1}, e_j \rangle = \langle u_{p+1}, e_j \rangle - \langle u_{p+1}, e_j \rangle = 0$$

Donc $\{e_1, \cdots, e_{p+1}\}$ est une famille orthonormale. D'autre part :

$$\begin{aligned}\langle u_{p+1}, e_{p+1} \rangle &= \langle v_{p+1} + \sum_{k=1}^{p} \langle u_{p+1}, e_k \rangle e_k, e_{p+1} \rangle \\ &= \langle v_{p+1}, e_{p+1} \rangle = \frac{1}{\|v_{p+1}\|} \langle v_{p+1}, v_{p+1} \rangle = \|v_{p+1}\| > 0\end{aligned}$$

Donc $\{e_1, \cdots, e_{p+1}\}$ est une famille orthonormale vérifiant 3.1 au rang $p+1$.

Prouvons maintenant l'unicité. Si $\mathcal{B}'_o = \{e'_1, \cdots, e'_n\}$ est une base orthonormale vérifiant 3.1, alors $\text{Vect}\{e_1\} = \text{Vect}\{u_1\} = \text{Vect}\{e'_1\}$ et $e'_1 = \pm \dfrac{u_1}{\|u_1\|}$. Mais comme $\langle u_1, e'_1 \rangle > 0$, $e'_1 = e_1$.

Soit $p \in \{1, \cdots, n-1\}$ et supposons que pour tout $k \in \{1, \cdots, p\}$, $e'_k = e_k$. Puisque $\text{Vect}\{e'_1, \cdots, e'_{p+1}\} = \text{Vect}\{u_1, \cdots, u_{p+1}\}$ on a :

$$e'_{p+1} = \mu u_{p+1} + \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_p e_p$$

car $\text{Vect}\{e_1, \cdots, e_p\} = \text{Vect}\{u_1, \cdots, u_p\}$. Comme $\langle e'_{p+1}, e_k \rangle = \langle e'_{p+1}, e'_k \rangle = 0$ pour tout $k \in \{1, \cdots, p\}$, on déduit que :

$$\lambda_k = -\mu \langle u_{p+1}, e_k \rangle$$

Donc :

$$e'_{p+1} = \mu \left(u_{p+1} - \sum_{k=1}^{p} \langle u_{p+1}, e_k \rangle e_k \right) = \mu v_{p+1} = \mu \|v_{p+1}\| e_{p+1}$$

Mais $\|e'_{p+1}\| = \|e_{p+1}\| = 1$, donc $\mu \|v_{p+1}\| = \pm 1$. Comme $\langle e'_{p+1}, u_{p+1} \rangle > 0$ et $\langle e_{p+1}, u_{p+1} \rangle > 0$, $e'_{p+1} = e_{p+1}$. $\square$

3.4 Adjoint d'un endomorphisme

$(E, \langle\ ,\ \rangle)$ est un espace euclidien de dimension finie n.

Théorème 3.4.1 *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Il existe un unique endomorphisme de E noté u^* tel que*

$$\forall x, y \in E,\ \langle u(x), y\rangle = \langle x, u^*(y)\rangle$$

PREUVE : Soit $\{e_1, \cdots, e_n\}$ une base orthonormée de E. Considérons l'endomorphisme $u^\star$ de E défini pour tout $y \in E$ par :

$$u^\star(y) = \sum_{i=1}^{n} \langle u(e_i), y\rangle e_i$$

Alors pour tout $x \in E$, on a :

$$\langle x, u^\star(y)\rangle = \langle x, \sum_{i=1}^{n} \langle u(e_i), y\rangle e_i\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle u(e_i), y\rangle\langle x, e_i\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle u(\langle x, e_i\rangle e_i), y\rangle = \langle u(x), y\rangle$$

D'autre part si v est un autre endomorphisme tel que pour $(x, y) \in E^2$, $\langle u(x), y\rangle = \langle x, v(y)\rangle$ alors :

$$\langle x, v(y) - u^\star(y)\rangle = 0$$

Et comme pour y fixé ceci est vrai pour tout $x \in E$, on a $v(y) - u^\star(y) = 0$ pour tout $y \in E$. □

Définition 3.4.1 *L'unique endomorphisme u^* est appelé l'**adjoint** de u.*

Proposition 3.4.1 *Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$. Alors :*

1. $(\lambda u + \mu v)^\star = \lambda u^\star + \mu v^\star$.
2. $(Id_E)^\star = Id_E$.
3. $(u \circ v)^\star = v^\star \circ u^\star$.
4. *Si u est un automorphisme alors $u^\star$ est un automorphisme et* $(u^{-1})^\star = (u^\star)^{-1}$.
5. $(u^\star)^\star = u$.

PREUVE :

1.

$$\begin{aligned}\langle x, (\lambda u + \mu v)^\star(y)\rangle &= \langle(\lambda u + \mu v)(x), y\rangle \\ &= \langle \lambda u(x) + \mu v(x), y\rangle \\ &= \lambda\langle u(x), y\rangle + \mu\langle v(x), y\rangle \\ &= \lambda\langle x, u^\star(y)\rangle + \mu\langle x, v^\star(y)\rangle \\ &= \langle x, (\lambda u^\star + \mu v^\star)(y)\rangle\end{aligned}$$

Comme cette égalité est vraie pour tout $x, y \in E$, on conclut que $(\lambda u + \mu v)^\star = \lambda u^\star + \mu v^\star$.

2. évident.
3. $$\begin{aligned}\langle (u\circ v)x, y\rangle &= \langle u(v(x)), y\rangle \\ &= \langle v(x), u^\star(y)\rangle \\ &= \langle x, v^\star(u^\star(y))\rangle \\ &= \langle x, (v^\star\circ u^\star)(y)\rangle\end{aligned}$$

   Par unicité de l'existence de l'adjoint on a : $(u\circ v)^\star = v^\star \circ u^\star$.
4. C'est une conséquence de 2 et 3.
5. évident.

$\square$

Proposition 3.4.2 *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E stable par u. Alors $F^\perp$ est stable par $u^\star$.*

Preuve : Si F est stable par u alors $u(F) \subset F$. Soit $x \in F^\perp$, alors pour tout $y \in F$, $u(y) \in F$ et :

$$\langle u^*(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle = 0$$

On en déduit que $u^*(x) \in F^\perp$ et $F^\perp$ est stable par u^*. $\square$

Proposition 3.4.3 *Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E. Alors pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$:*

$$Mat\ _{\mathcal{B}}(u^\star) = {}^t Mat\ _{\mathcal{B}}(u)$$

Preuve : Supposons que $\mathcal{B} = \{e_1, \cdots, e_n\}$. Posons $A = \text{Mat }_{\mathcal{B}}(u) = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $B = \text{Mat }_{\mathcal{B}}(u^\star) = (b_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Pour tout $(i,j) \in \{1,\cdots,n\}^2$:

$$\langle u(e_i), e_j\rangle = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}\langle e_k, e_j\rangle = a_{ji}$$

d'autre part :

$$\langle u(e_i), e_j\rangle = \langle e_i, u^\star(e_j)\rangle = \sum_{k=1}^{n} b_{kj}\langle e_i, e_k\rangle = b_{ij}$$

Donc $a_{ji} = b_{ij}$ ce qui prouve que ${}^tA = B$. $\square$

Corollaire 3.4.1 *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors $\det(u) = \det(u^\star)$. De plus u et $u^\star$ ont le même polynôme caractéristique.*

Corollaire 3.4.2 *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors $\text{rg }(u) = \text{rg }(u^\star)$.*

3.5 Endomorphismes symétriques et antisymétriques

$(E, \langle\ ,\ \rangle)$ est un espace euclidien de dimension finie n.

3.5.1 Définition et généralités

Définition 3.5.1 *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que :*

1. *u est **symétrique** ou **autoadjoint** si : $u^\star = u$.*
2. *u est **antisymétrique** si $u^\star = -u$.*

Proposition 3.5.1 *Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E. Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $A = Mat_{\mathcal{B}}(u)$. Alors :*

1. *u est symétrique si et seulement si A est symétrique.*
2. *u est antisymétrique si et seulement si A est antisymétrique.*

Notons $\mathcal{S}(E)$ et $\mathcal{A}(E)$ l'ensemble respectivement des endomorphismes symétriques et des endomorphismes antisymétriques de E.

Proposition 3.5.2 *$\mathcal{S}(E)$ et $\mathcal{A}(E)$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{L}(E)$ qui sont supplémentaires.*

Remarque 3.5.1 *Si $\mathcal{B}$ est une base orthonormée de E les applications :*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}(E) & \longrightarrow & \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \\ u & \longmapsto & Mat_{\mathcal{B}}(u) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{A}(E) & \longrightarrow & \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \\ u & \longmapsto & Mat_{\mathcal{B}}(u) \end{array}$$

sont des isomorphismes. Il s'ensuit que $\dim(\mathcal{S}(E)) = \dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})) = \dfrac{n(n+1)}{2}$ *et* $\dim(\mathcal{A}(E)) = \dim(\mathcal{A}_n(\mathbb{R})) = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

Proposition 3.5.3 *Soient p un projecteur de E et s une symétrie de E. Alors :*

1. *p est un projecteur orthogonal si et seulement si p est symétrique.*
2. *s est une symétrie orthogonale si et seulement si s est symétrique.*

Proposition 3.5.4 *Soit s un endomorphisme de E. Alors s est une symétrie orthogonale si et seulement si il existe deux entiers p et q tels que $p+q = n$ et une base orthonormale $\mathcal{B} = \{e_1, \cdots, e_n\}$ tels que :*

$$Mat_{\mathcal{B}}(s) = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix}$$

Dans ce cas s est une symétrie orthogonale par rapport à $\mathrm{Ker}\ (s - Id_E) = Vect\{e_1, \cdots, e_p\}$. *De plus* $(\mathrm{Ker}\ (s - Id_E))^\perp = \mathrm{Ker}\ (s + Id_E) = Vect\{e_{p+1}, \cdots, e_n\}$.

3.5.2 Réduction des endomorphismes symétriques

Proposition 3.5.5 *Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme symétrique $u \in \mathcal{L}(E)$ est scindé sur $\mathbb{R}$ et les sous-espaces propres associés à deux valeurs propres distinctes sont orthogonaux.*

Preuve : Soit $\mathcal{B}$ une b.o.n. de E et $A = \text{Mat}_{\,B}(u)$. On a $A = {}^tA$ et $\chi_u = \chi_A$.

D'après le théorème de D'Alembert, le polynôme caractéristique χ_A a au moins une racine $\lambda \in \mathbb{C}$. Il existe donc $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n \simeq \mathcal{M}_{(n,1)}(\mathbb{C})$, $X \neq 0$ tel que $AX = \lambda X$.

Comme $X \neq 0$, ${}^t\overline{X}X = \begin{pmatrix} \overline{x}_1 & \cdots & \overline{x}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \neq 0$. On a :

$$ {}^t\overline{X}AX = {}^t\overline{X}(AX) = {}^t\overline{X}(\lambda X) = \lambda({}^t\overline{X}X) = \lambda \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 $$

Comme ${}^tA = A$ et que $\bar{A} = A$, on a

$$ {}^t\overline{X}AX = {}^t\overline{X}\bar{A}X = {}^t(\overline{AX})X = {}^t(\overline{\lambda X})X = \bar{\lambda}\,{}^t\overline{X}X = \bar{\lambda} \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 $$

On en déduit que $\bar{\lambda} = \lambda$ (car $\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \neq 0$), c-à-d. $\lambda \in \mathbb{R}$ et que χ_u est scindé sur $\mathbb{R}$.

Soient maintenant λ, μ deux valeurs propres distinctes. Soient $x \in \text{Ker } (u - \lambda \text{Id}_E)$ et $y \in \text{Ker } (u - \mu \text{Id}_E)$ non nuls. On a

$$ \langle u(x), y \rangle = \langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle $$

et comme u est symétrique

$$ \langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle = \langle x, \mu y \rangle = \mu \langle x, y \rangle $$

d'où $(\lambda - \mu)\langle x, y \rangle = 0$ et $\langle x, y \rangle = 0$, car $\lambda \neq \mu$. Ainsi $\text{Ker } (u - \lambda \text{Id}_E) \perp \text{Ker } (u - \mu \text{Id}_E)$. $\square$

Théorème 3.5.1 *Tout endomorphisme symétrique $u \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable. Plus précisément il existe une base orthonormale de E formée de vecteurs propres de u.*

Preuve : On va faire une démonstration par récurrence sur la dimension n de E. Le résultat est évident lorsque $\dim(E) = 1$. Supposons que $n \geqslant 2$ et supposons le résultat vrai pour tout endomorphisme symétrique d'un espace vectoriel euclidien de dimension $n-1$.

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme symétrique. On déduit de la Proposition 3.5.5 que u admet au moins une valeur propre $\lambda_1 \in \mathbb{R}$. Soit $e_1 \in E$ un vecteur propre associé à λ_1 tel que $\|e_1\| = 1$. Le sous-espace $F = \mathbb{R}e_1$ étant stable par u, le sous-espace $F^\perp$ est stable par u^* et donc par u d'après la proposition 3.4.2, car $u^* = u$. Notons $v = u_{|_{F^\perp}}$ la restriction de u à $F^\perp$. Alors $v \in \mathcal{L}(F^\perp)$ et $v^* = v$ car :

$$\forall x, y \in F^\perp \quad , \quad \langle v(x), y\rangle = \langle u(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle = \langle x, v(y)\rangle$$

Enfin $\dim(F^\perp) = n-1$. On applique alors l'hypothèse de récurrence à $F^\perp$ et à l'endomorphisme v. Il existe donc une base orthonormée $\{e_2, \ldots, e_n\}$ de $F^\perp$ constituée de vecteurs propres de v et donc de u. On en déduit que $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ est une base orthonormée de u formée de vecteurs propres de u. D'où le résultat. □

Corollaire 3.5.1 *Toute matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable.*

3.6 Formes linéaires sur un espace euclidien

Soit $(E, \langle \ , \ \rangle)$ un espace euclidien de dimension finie n. Pour tout $u \in E$, définissons l'application :

$$\begin{array}{rccc} \Phi(u) & : & E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & \langle x, u\rangle \end{array}$$

Proposition 3.6.1 *Pour tout $u \in E$, $\Phi(u)$ est une forme linéaire sur E. De plus l'application :*

$$\begin{array}{rccc} \Phi & : & E & \longrightarrow & E^\star \\ & & u & \longmapsto & \Phi(u) \end{array}$$

est un isomorphisme.

Preuve : Rappelons que E et E^* sont deux espaces vectoriels de même dimension finie et $\dim E = \dim E^* = n$.
L'application Φ est une application linéaire. En effet pour tout $(u, v) \in E^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$\begin{aligned} \Phi(u + \lambda v)(x) &= \langle u + \lambda v, x\rangle = \langle u, x\rangle + \lambda\langle v, x\rangle \\ &= \Phi(u)(x) + \lambda\Phi(v)(x) = (\Phi(u) + \lambda\Phi(v))(x) \end{aligned}$$

Donc $\Phi(u + \lambda v) = \Phi(u) + \lambda\Phi(v)$. De plus,

$$\begin{aligned} u \in \operatorname{Ker} \Phi &\iff \langle u, x\rangle = 0, \ \forall x \in E \\ &\iff u \in E^\perp = \{0\} \\ &\iff u = 0. \end{aligned}$$

Donc Ker $\Phi = \{0\}$. Comme E et $E^\star$ sont de même dimension finie, Φ est un isomorphisme. □

Remarque 3.6.1 *1. La proposition nous dit que pour tout $\ell \in E^*$, il existe un unique vecteur u de E tel que :*

$$\forall x \in E \quad , \quad \ell(x) = \langle u, x\rangle \tag{3.3}$$

2. Si $\{e_1, \cdots, e_n\}$ est une base orthonormée de E et $\{e_1^\star, \cdots, e_n^\star\}$ sa base duale, alors pour toute forme linéaire ℓ, l'unique vecteur u de E vérifiant 3.3 vérifie :

$$u = \sum_{i=1}^{n} \ell(e_i)e_i$$

Réciproquement si u est un vecteur de E et $\ell = \Phi(u)$, alors :

$$\ell = \sum_{i=1}^{n} \langle u, e_i\rangle e_i^\star$$

3.7 Formes quadratiques sur un espace euclidien

$(E, \langle \ , \ \rangle)$ est un espace euclidien de dimension finie n.

Proposition 3.7.1 *1. Pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, l'application q_u définie pour tout $x \in E$ par :*

$$q_u(x) = \langle u(x), x\rangle$$

est une forme quadratique sur E dont la forme polaire φ_u est donnée par :

$$\forall (x,y) \in E^2 \quad , \quad \varphi_u(x,y) = \frac{1}{2}\left(\langle u(x), y\rangle + \langle x, u(y)\rangle\right)$$

2. L'application :

$$\begin{array}{rcccc} L & : & \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{Q}(E) \\ & & u & \longmapsto & L(u) := q_u \end{array}$$

est linéaire et surjective et on a Ker $(L) = \mathcal{A}(E)$.

3. L'application $L_{|\mathcal{S}(E)}$ est un isomorphisme de $\mathcal{S}(E)$ sur $\mathcal{Q}(E)$. Autrement dit pour tout $q \in \mathcal{Q}(E)$, il existe un unique $u \in \mathcal{S}(E)$ tel que :

$$\forall x \in E \quad , \quad q(x) = \langle u(x), x\rangle$$

et la forme polaire de q est donnée par :

$$\forall (x,y) \in E^2 \quad , \quad \varphi_u(x,y) = \langle u(x), y\rangle$$

PREUVE :

1. Pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, l'application $\varphi_u : E^2 \to \mathbb{R}$ est linéaire par rapport à la première place et symétrique. Donc φ_u est une forme bilinéaire symétrique et q_u est ainsi une forme quadratique dont φ_u est la forme polaire.
2. Soient $(u, v) \in E^2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors pour tout $x \in E$:

$$\begin{aligned} L(\alpha u+v)(x) &= q_{\alpha u+v}(x) = \langle(\alpha u+v)(x), x\rangle \\ &= \alpha\langle u(x), x\rangle + \langle v(x), x\rangle = \alpha q_u(x) + q_v(x) \\ &= \alpha L(u)(x) + L(v)(x) = (\alpha L(u) + L(v))(x) \end{aligned}$$

Donc $L(\alpha u + v) = \alpha L(u) + L(v)$ et L est linéaire. Maintenant :

$$\begin{aligned} u \in \text{Ker } (L) &\Leftrightarrow q_u = 0 \Leftrightarrow \varphi_u = 0 \\ &\Leftrightarrow (\forall (x, y) \in E^2 \quad , \quad \langle u(x), y\rangle + \langle x, u(y)\rangle = 0) \\ &\Leftrightarrow u^\star = -u \\ &\Leftrightarrow u \in \mathcal{A}(E) \end{aligned}$$

Il s'ensuit par le théorème du rang et par les remarques 3.5.1, 2.2.4 et la proposition 2.4.4 que rg $(L) = \dim(\mathcal{L}(E)) - \dim(\mathcal{A}(E)) = \dim(\mathcal{S}(E)) = \dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})) = \dim(\mathcal{S}^2(\mathbb{R})) = \dim(\mathcal{Q}(E))$. Donc L est surjective.

3. Si $u \in \text{Ker } (L_{|\mathcal{S}(E)})$, alors $u \in \mathcal{S}(E) \cap \mathcal{A}(E) = \{0\}$ car ces deux sous-espaces sont en somme directe.

□

Définition 3.7.1 *Soit $q \in \mathcal{Q}(E)$ et $u \in \mathcal{S}(E)$ l'unique endomorphisme symétrique tel que $q = q_u$. Alors q et u sont dits* ***associés****.*

Proposition 3.7.2 *Soient $q \in \mathcal{Q}(E)$ et $u \in \mathcal{S}(E)$ l'endomorphisme symétrique associé à q. Alors pour toute base orthonormale de E on a :*

$$Mat_{\mathcal{B}}(u) = Mat_{\mathcal{B}}(q)$$

PREUVE : Soit $\mathcal{B} = \{e_1, \cdots, e_n\}$ une base orthonormée. Soit φ la forme polaire de q. Alors :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(q) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = (\varphi(e_i, e_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$$

Soit $M = (m_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$. Alors pour tout $j \in \{1, \cdots, n\}$, on a :

$$u(e_j) = \sum_{i=1}^{n} m_{ij} e_i = \sum_{i=1}^{n} \langle u(e_j), e_i\rangle e_i = \sum_{i=1}^{n} \varphi(e_i, e_j) e_i$$

Donc pour tout $(i, j) \in \{1, \cdots, n\}^2$, $m_{ij} = \varphi(e_i, e_j)$ et $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(q)$. □

Théorème 3.7.1 *Pour toute forme quadratique q de E, il existe une base orthonormale qui est q-orthogonale.*

PREUVE : Soit u l'endomorphisme symétrique associé à q. D'après le théorème 3.5.1, il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$ de E formée de vecteurs propres de u. Donc :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

où $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de u. Mais d'après la proposition précédente comme $\mathcal{B}$ est orthonormale alors $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(q) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ ce qui entraîne que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(q)$ est diagonale et donc que $\mathcal{B}$ est q-orthogonale. $\square$

Corollaire 3.7.1 *Soit q une forme quadratique d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n et A la matrice de q dans une base quelconque. Notons s le nombre de valeurs propres strictement positives et t le nombre de valeurs propres strictement négatives. Alors (s, t) est la signature de q. En particulier q est définie positive si toutes les valeurs propres de A sont strictement positives.*

PREUVE : Soit $\mathcal{B} = \{e_1, \cdots, e_n\}$ une base quelconque de E et $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(q)$. Munissons E du produit scalaire suivant :

$$\forall (x, y) \in E^2 \ , \ \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} e_i^\star(x) e_i^\star(y)$$

où $\{e_1^\star, \cdots, e_n^\star\}$ est la base duale de $\mathcal{B}$. Alors $\mathcal{B}$ est une base orthonormale de E. Soit u l'endomorphisme symétrique associé à q. Alors il existe une base orthonormale $\mathcal{B}_0$ qui est q-orthogonale. Donc :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(q) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

et $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de u. Donc pour tout $x \in E$:

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (f_i^\star(x))^2$$

où $\{f_1^\star, \cdots, f_n^\star\}$ est la base duale de $\mathcal{B}_0$. Cette dernière égalité permet de conclure. $\square$

3.8 Groupe orthogonal d'un espace euclidien

La notion d'automorphisme orthogonal est primordiale. En effet, intéressons-nous aux isométries d'un espace euclidien $(E, \langle\ ,\ \rangle)$, c'est-à-dire aux applications $f : E \to E$ qui vérifient :

$$\forall (x, y) \in E^2\ ,\ \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$$

Autrement dit la distance est préservée, c'est-à-dire que la distance de $f(x)$ à $f(y)$ est la même que la distance de x à y pour tout couple de vecteurs (x, y) de E^2. Alors f est - à une *translation* près - un automorphisme orthogonal. C'est l'objet de l'exercice 22 de la feuille 3.

Dans toute la suite, $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ est un espace euclidien de dimension finie $n \geqslant 1$. $GL(E)$ désigne l'ensemble des automorphismes de E. On rappelle que $GL(E)$ est un groupe pour la loi de composition $\circ$ et s'appelle le **groupe linéaire** de E.

D'autre part $GL_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $GL_n(\mathbb{R})$ est un groupe pour la multiplication des matrices et s'appelle le **groupe linéaire d'ordre** n.

3.8.1 Définitions et premières propriétés

Voici la définition standard d'automorphisme orthogonal qu'il faut absolument savoir. On verra par la suite qu'il y a plein d'autres définitions équivalentes.

Définition 3.8.1 *Un automorphisme u de E est dit **orthogonal** si $u^\star = u^{-1}$. Autrement dit u est un automorphisme orthogonal si et seulement si :*

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad , \quad \langle u(x), y\rangle = \langle x, u^{-1}(y)\rangle$$

L'ensemble des automorphismes orthogonaux est noté $\mathcal{O}(E)$.

Proposition 3.8.1 *Soit u un automorphisme orthogonal de E. Alors pour toute base orthonormale $\mathcal{B}$ de E, $u(\mathcal{B})$ est une base orthonormale de E.*

PREUVE : je vous laisse la preuve en exercice. □

Et voici la définition standard de matrice orthogonale.

Définition 3.8.2 *Une matrice inversible M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite **orthogonale** si ${}^tM = M^{-1}$. L'ensemble des matrices orthogonales est noté $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.*

La proposition ci-dessous fait le lien entre automorphisme orthogonal et matrice orthogonale et nous montre que les deux notions coïncident en certaines circonstances.

Proposition 3.8.2 *Soient $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $M = Mat_{\mathcal{B}}(u)$. Alors :*

$$u \in \mathcal{O}(E) \Leftrightarrow M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$$

PREUVE : je vous laisse la preuve en exercice. Pour cela il vous faut utiliser la proposition 3.4.3. □

Théorème 3.8.1
1. *$\mathcal{O}(E)$ est un sous-groupe de $GL(E)$.*
2. *$\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$.*

PREUVE : ***cette preuve est un bon exercice d'Algèbre du S3.***

1. $\mathcal{O}(E)$ est non vide car $\mathrm{Id}_E \in \mathcal{O}(E)$. En effet $\mathrm{Id}_E^\star = \mathrm{Id}_E = \mathrm{Id}_E^{-1}$. D'autre part soit $(u, v) \in \mathcal{O}(E)^2$. Alors $u^\star = u^{-1}$ et $v^\star = v^{-1}$. Alors d'après la proposition 3.4.1 :
$$(u \circ v^{-1})^\star = (v^{-1})^\star \circ u^\star = (v^\star)^{-1} \circ u^{-1} = v \circ u^{-1} = (u \circ v^{-1})^{-1}$$
Donc $u \circ v^{-1} \in \mathcal{O}(E)$ et $\mathcal{O}(E)$ est un sous-groupe de $GL(E)$.
2. La preuve est laissée au lecteur.

□

Dans les deux énoncés qui suivent, il faut absolument retenir que le déterminant d'un automorphisme orthogonal ou d'une matrice orthogonale est ± 1.

Théorème 3.8.2 *Pour tout $u \in \mathcal{O}(E)$, $\det(u) = \pm 1$. De plus l'ensemble $\mathcal{SO}(E) = \{u \in \mathcal{O}(E)\ ;\ \det(u) = +1\}$ est un sous-groupe de $\mathcal{O}(E)$ appelé **groupe spécial orthogonal** de E. Les éléments de $\mathcal{SO}(E)$ s'appelle des **rotations vectorielles**.*

PREUVE : Si $u \in \mathcal{O}(E)$, alors $u \circ u^* = \mathrm{Id}_E$. Comme $\det(u^* \circ u) = (\det(u^*))(\det(u))$ et $\det(u^*) = \det(u)$, on a $(\det(u))^2 = 1$.

D'autre part l'application $\theta : \mathcal{O}(E) \to \{-1, +1\}$ définie par $\theta(u) = \det(u)$ est un morphisme du groupe $(\mathcal{O}(E), \circ)$ dans le groupe $(\{-1, +1\}, \times)$. De plus

$$\mathrm{Ker}\ \theta = \{u \in \mathcal{O}(E),\ \det(u) = +1\} = \mathcal{SO}(E)$$

Donc $\mathcal{SO}(E)$ est un sous-groupe de $\mathcal{O}(E)$. □

De même on a :

Théorème 3.8.3 *Pour tout $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $\det(A) = \pm 1$. De plus l'ensemble $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})\ ;\ \det(A) = +1\}$ est un sous-groupe de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ appelé **groupe spécial orthogonal d'ordre** n.*

Proposition 3.8.3 *Soit u un endomorphisme de E. Alors u est une symétrie orthogonale si et seulement si $u \in \mathcal{O}(E) \cap \mathcal{S}(E)$.*

PREUVE : je vous laisse la preuve en exercice. Il faudra pour cela utiliser le critère caractérisant les symétries rappelé dans l'introduction du paragraphe 3.2.1 sur les projecteurs et symétries orthogonales et utiliser la proposition 3.5.3. □

De cette proposition il faut donc absolument retenir que les symétries orthogonales sont les seuls automorphismes orthogonaux symétriques.

3.8.2 Caractérisations des automorphismes et matrices orthogonales

Dans cette partie, on va énoncer tout un tas de critères définissant de manière équivalente les automorphismes orthogonaux ou matrices orthogonales.

Théorème 3.8.4 *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. $u \in \mathcal{O}(E)$.
2. $\forall (x,y) \in E^2 \quad , \quad \langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, y\rangle$.
3. $\forall x \in E \quad , \quad \|u(x)\| = \|x\|$.

PREUVE : ***refaites cette preuve, elle ne présente aucune difficulté. C'est un exercice d'algèbre bilinéaire standard.***

1. $1 \Rightarrow 2$. Supposons que $u \in \mathcal{O}(E)$. Alors :
$$\forall (x,y) \in E^2 \quad , \quad \langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, u^\star(u(y))\rangle = \langle x, u^{-1}(u(y))\rangle = \langle x, y\rangle$$
2. $2 \Rightarrow 1$. Supposons que pour tout $(x,y) \in E^2$, $(x,y) \in E^2 \quad , \quad \langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, y\rangle$. Soit $x \in \text{Ker } (u)$. Alors pour tout $y \in E$:
$$0 = \langle 0, u(y)\rangle = \langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, y\rangle$$
Donc $x \in E^\perp = \{0\}$ et $x = 0$. Donc u est injective et comme u est un endomorphisme d'un espace de dimension finie, u est un automorphisme. Donc pour tout $(x,y) \in E^2$ on a :
$$\langle u(x), y\rangle = \langle u(x), u(u^{-1}(y))\rangle = \langle x, u^{-1}(y)\rangle$$
Donc $u^\star = u^{-1}$ et $u \in \mathcal{O}(E)$.
3. $2 \Rightarrow 3$. Si pour tout $(x,y) \in E^2 \quad , \quad \langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, y\rangle$, alors en particulier on a pour tout $x \in E$: $\|u(x)\|^2 = \|x\|^2$.
4. $3 \Rightarrow 2$. Supposons que pour tout $x \in E$ on a $\|u(x)\| = \|x\|$. Notons φ et ψ les deux applications définies de E^2 dans $\mathbb{R}$ par :
$$\forall (x,y) \in E^2 \quad , \quad \varphi(x,y) = \langle u(x), u(y)\rangle \quad , \quad \psi(x,y) = \langle x, y\rangle$$

Alors φ et ψ sont des formes bilinéaires symétriques vérifiant pour tout $x \in E$:

$$\varphi(x, x) = \psi(x, x) = \|x\|^2$$

Par unicité de la forme polaire d'une forme quadratique, $\varphi = \psi$. D'où le résultat.

□

Corollaire 3.8.1 *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, alors $u \in \mathcal{O}(E)$ si et seulement si il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$ de E telle que $u(\mathcal{B})$ soit une base orthonormale de E.*

PREUVE : Supposons que $\{e_1, \cdots, e_n\}$ et $\{u(e_1), \cdots, u(e_n)\}$ soient des bases orthonormales de E. Alors pour tout $x \in E$, on a :

$$\begin{aligned}
\|u(x)\|^2 &= \left\langle u\left(\sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle e_i\right), u\left(\sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j\rangle e_j\right)\right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \langle x, e_i\rangle \langle x, e_j\rangle \langle u(e_i), u(e_j)\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \langle x, e_i\rangle \langle x, e_j\rangle \delta_{ij} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle^2 = \|x\|^2
\end{aligned}$$

Donc d'après le théorème précédent, u est un automorphisme orthogonal.

La réciproque est immédiate grâce à la proposition 3.8.1. □

Autrement dit si vous rencontrez un endomorphisme qui vous envoie une base orthonormale sur une base orthonormale, alors c'est forcément un automorphisme orthogonal.

Voici un résumé de ce qu'il faut retenir concernant la caractérisation des automorphismes orthogonaux.

RÉSUMÉ : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors toutes les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $u \in \mathcal{O}(E)$.
2. $\forall (x, y) \in E^2 \quad , \quad \langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, y\rangle$.
3. $\forall x \in E \quad , \quad \|u(x)\| = \|x\|$.
4. **Il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$ de E telle que $u(\mathcal{B})$ soit une base orthonormale de E.**

5. **Pour toute base orthonormale $\mathcal{B}$ de E, $u(\mathcal{B})$ est une base orthonormale de E.**

Maintenant voici des critères caractérisant les matrices orthogonales.

Corollaire 3.8.2 *Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E. Alors une famille $\mathcal{B}'$ de n vecteurs est une base orthonormale de E si et seulement si $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$ est une matrice orthogonale.*

Preuve : Soient $\mathcal{B} = \{e_1, \cdots, e_n\}$ une base orthonormale de E et $\mathcal{B}' = \{e'_1, \cdots, e'_n\}$ une famille de n vecteurs. Considérons l'unique endomorphisme u de E vérifiant $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$. D'après la proposition 3.8.2 et le corollaire précédent :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow u \in \mathcal{O}(E) \Leftrightarrow u(\mathcal{B}) \text{ est une base orthonormale}$$

Or d'après la définition de u, on a $u(\mathcal{B}) = \mathcal{B}'$. Ceci achève la preuve. □

Pour tout entier $n \geqslant 1$, l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ des matrices colonnes peut être muni du **produit scalaire canonique** défini comme suit. Pour tout $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$:

$$\langle X, Y \rangle = {}^tXY = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Dans ce cas la base canonique $\{E_1, \cdots, E_n\}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est une base orthonormale. Via ce produit scalaire, on a une autre caractérisation des matrices orthogonales.

Corollaire 3.8.3 *Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors M est orthogonale si et seulement si la famille des colonnes de M forment une base orthonormale de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.*

Preuve : Notons $C_1(M), \cdots, C_n(M)$ les colonnes de M et $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Alors pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$, la matrice colonne des coordonnées de $C_i(M)$ dans la base $\mathcal{C}$ est $C_i(M)$. Donc :

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}}\{C_1(M), \cdots, C_n(M)\} = M$$

Et on conclut avec le corollaire précédent. □

RÉSUMÉ : Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors toutes les assertions suivantes sont équivalentes :

1. **$M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.**

2. **M est la matrice de passage d'une base orthonormale à une autre base orthonormale dans E.**
3. **Pour toute base orthonormale $\mathcal{B}$ de E et toute famille $\mathcal{B}'$ de vecteurs de E telle que Mat $_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = M$, $\mathcal{B}'$ est orthonormale.**
4. **La famille des colonnes de M forment une base orthonormale de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire canonique.**

Le corollaire qui suit apporte une précision au corollaire 3.5.1.

Corollaire 3.8.4 *Toute matrice symétrique M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable. Plus précisément, il existe une matrice orthogonale P telle que $P^{-1}MP$ soit diagonale.*

Preuve : Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien de dimension n. Soient $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E et $u \in \mathcal{L}(E)$ l'unique endomorphisme vérifiant Mat $_{\mathcal{B}}(u) = M$. u est alors symétrique et d'après le théorème 3.5.1, il existe une base orthonormale $\mathcal{B}'$ de E telle que Mat $_{\mathcal{B}'}(u)$ soit diagonale. Dans ce cas si on note P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, alors $P^{-1}MP$ est diagonale et comme $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ sont toutes les deux orthonormales, d'après le corollaire 3.8.2, P est orthogonale. □

Le corollaire ci-dessus nous enseigne donc que : quand on veut diagonaliser une matrice symétrique à l'aide d'une matrice de passage orthogonale, il suffit de chercher une base orthonormale dans chacun des sous-espaces propres de M et comme les sous-espaces propres sont orthogonaux, en réunissant les bases, on obtient une base orthonormale de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et donc la matrice de passage est orthogonale (voir exercice 25).

3.8.3 Réduction des automorphismes orthogonaux

Dans cette dernière partie on va s'intéresser à la structure des automorphismes orthogonaux. Pourquoi faire ? Eh bien, comprendre leur structure qui s'illustrera dans les deux derniers énoncés du chapitre (théorème 3.8.6 et corollaire 3.8.5) permettra entre autres de classifier les isométries d'un espace euclidien en petite dimension dans le dernier chapitre.

Comme toujours, lorsqu'on cherche à comprendre la structure d'un endomorphisme u, on cherche d'abord à décomposer l'espace en une somme directe de sous-espaces stables par u dont la dimension est la plus petite possible. C'est ce que l'on fait quand on diagonalise un endomorphisme. En effet supposons que $\mathcal{B} = \{e_1, \cdots, e_n\}$ est une base qui diagonalise un endomorphisme u. Alors $E = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathrm{Vect}\{e_i\}$ et chaque Vect$\{e_i\}$ est stable par u puisque $u(e_i) = \lambda_i e_i$ - λ_i étant la valeur propre associée au vecteur propre e_i.

Théorème 3.8.5 *Soit $u \in \mathcal{O}(E)$.*

1. $\mathrm{Sp}(u) \subset \{-1, 1\}$ *et les sous-espaces propres sont orthogonaux.*
2. *u est diagonalisable si et seulement si u est la symétrie orthogonale par rapport à* $\mathrm{Ker}\ (u - Id_E)$.
3. *Si F est un sous-espace vectoriel stable par u, alors $F^\perp$ est stable par u et la restriction $u_{|_F}$ (resp. $u_{|_{F^\perp}}$) de u à F (resp. à $F^\perp$) est un élément de $\mathcal{O}(F)$ (resp. $\mathcal{O}(F^\perp)$).*
4. $\mathrm{Ker}\ (u - Id_E)$ *et* $Im\ (u - Id_E)$ *sont supplémentaires orthogonaux.*

Les points 1. et 2. sont absolument à retenir.

Preuve : ***refaites cette preuve, elle ne présente aucune difficulté. C'est un exercice d'algèbre bilinéaire standard.***

1. Si λ est une valeur propre de u, il existe $x \in E \setminus \{0\}$ tel que $u(x) = \lambda x$. Comme $\|u(x)\| = \|x\|$, alors $\|\lambda x\| = \|x\|$ et $|\lambda|\|x\| = \|x\|$ ce qui entraîne que $|\lambda| = 1$ puisque $x \neq 0$.
   Notons $E_1(u) = \mathrm{Ker}\ (u - \mathrm{Id}_E)$ et $E_{-1}(u) = \mathrm{Ker}\ (u + \mathrm{Id}_E)$ les sous-espaces propres associés aux valeurs propres éventuelles 1 et -1. Pour $(x, y) \in E_1(u) \times E_{-1}(u)$, on a $\langle x, y\rangle = \langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, -y\rangle = -\langle x, y\rangle$, donc $\langle x, y\rangle = 0$ et $E_1(u) \perp E_{-1}(u)$.
2. Si u est diagonalisable alors E est la somme directe de ses sous-espace propres :
   — si $\mathrm{Sp}(u) = \{1\}$, alors $E = E_1(u)$ et $u = \mathrm{Id}_E$. Donc u est la symétrie orthogonale par rapport à $E = E_1(u)$.
   — si $\mathrm{Sp}(u) = \{-1\}$, alors $E = E_{-1}(u)$ et $u = -\mathrm{Id}_E$. Donc u est la symétrie orthogonale par rapport à $\{0\} = \mathrm{Ker}\ (u - \mathrm{Id}_E)$.
   — si $\mathrm{Sp}(u) = \{-1, 1\}$, alors $E = E_1(u) \oplus E_{-1}(u)$. Il s'ensuit que $E_1(u)$ et $E_{-1}(u)$ sont des supplémentaires orthogonaux. Donc si $x \in E$, alors $x = p(x) + q(x)$ où p et q sont respectivement les projecteurs orthogonaux sur $E_1(u)$ et $E_{-1}(u)$. Et on a : $u(x) = p(x) - q(x)$. Donc u est la symétrie orthogonale par rapport à $E_1(u)$.
3. Soit F est un sous-espace vectoriel de E stable par u. Alors $u(F) \subset F$, $u_{|_F} : F \to F$ est linéaire et $u_{|_F} \in \mathcal{L}(F)$. Comme pour tout $x \in F$, $\|u_{|_F}(x)\| = \|u(x)\| = \|x\|$ on a $u_{|_F} \in \mathcal{O}(F)$. F étant stable par u, d'après la proposition 3.4.2 $F^\perp$ est stable par $u^* = u^{-1}$, donc $u^{-1}(F^\perp) \subset F^\perp$ ou encore $F^\perp \subset u(F^\perp)$. Puisque u est inversible $u(F^\perp)$ a la même dimension que $F^\perp$. On en déduit que $u(F^\perp) = F^\perp$ et $F^\perp$ est stable par u.
   Comme $F^\perp$ est stable par u, on déduit d'après ce qui a été fait plus haut que $u_{|_{F^\perp}} \in \mathcal{O}(F^\perp)$.
4. Soit $(x, y) \in \mathrm{Ker}\ (u - \mathrm{Id}_E) \times \mathrm{Im}\ (u - \mathrm{Id}_E)$. Alors il existe $z \in E$ tel que $y = u(z) - z$. Donc :
$$\langle x, y\rangle = \langle x, u(z) - z\rangle = \langle x, u(z)\rangle - \langle x, z\rangle = \langle u(x), u(z)\rangle - \langle x, z\rangle = 0$$

Donc Ker $(u - \mathrm{Id}_E)$ et Im $(u - \mathrm{Id}_E)$ sont orthogonaux et :

$$\mathrm{Ker}\ (u - \mathrm{Id}_E) \subset (\mathrm{Im}\ (u - \mathrm{Id}_E))^{\perp}$$

Or :

$$\dim(\mathrm{Ker}\ (u - \mathrm{Id}_E)) = n - \dim(\mathrm{Im}\ (u - \mathrm{Id}_E)) = \dim(\mathrm{Im}\ (u - \mathrm{Id}_E))^{\perp}$$

Donc Ker $(u - \mathrm{Id}_E) = (\mathrm{Im}\ (u - \mathrm{Id}_E))^{\perp}$ et :

$$E = (\mathrm{Im}\ (u - \mathrm{Id}_E))^{\perp} \oplus \mathrm{Im}\ (u - \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Ker}\ (u - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Im}\ (u - \mathrm{Id}_E)$$

On a donc prouvé que Ker $(u - \mathrm{Id}_E)$ et Im $(u - \mathrm{Id}_E)$ sont supplémentaires orthogonaux.

□

Les deux lemmes qui suivent sont des lemmes techniques. Cependant leurs preuves ne sont pas inaccessibles.

Ce premier lemme est un lemme général d'algèbre linéaire : f est un endomorphisme quelconque et E un espace vectoriel réel de dimension finie sans structure supplémentaire.

Lemme 3.8.1 *Soit f une endomorphisme d'un espace vectoriel réel E de dimension finie $n \geqslant 1$. Alors il existe au moins un sous-espace vectoriel stable par f de dimension 1 ou 2.*

Que nous raconte ce lemme ? Commencer par remarquer que dire qu' un endomorphisme f admet une valeur propre, c'est la même chose que de dire qu'il existe un sous-espace de dimension 1 stable par f. Ce lemme nous dit que si un endomorphisme f n'admet pas de valeur propre (ça existe - par exemple en dimension 4, un endomorphisme dont le polynôme caractéristique vérifie $\chi_f(\lambda) = (\lambda^2 + 1)^2$) alors il existe au moins un sous-espace de dimension 2 stable par f.

Preuve : **cette preuve est un très bon exercice de révision d'algèbre linéaire 2 du S3.**

Si f admet une valeur propre λ, alors il existe un vecteur propre x associé à λ et la droite vectorielle $\mathbb{R}x$ est stable par f.

Supposons maintenant que f n'admet pas de valeur propre. Soit μ_f le polynôme minimal de f. Alors μ_f n'a que des racines complexes et $\mu_f = P_1 \cdots P_r$ où $P_1, \cdots, P_r$ sont des polynômes unitaires de degré 2 irréductibles (i.e. à discriminant < 0). Comme μ_f est un polynôme annulateur $\mu_f(f) = P_1(f) \circ P_2(f) \circ \cdots \circ P_r(f) = 0$ et Ker $(\mu_f(f)) = E$. Il s'ensuit que l'un des endomorphismes $P_i(f)$ est non injectif. En effet, s'ils sont tous injectifs, alors pour $x \in E = \mathrm{Ker}\ (\mu_f(f))$, l'injectivité de $P_1(f)$ entraîne :

$$(P_2(f) \circ \cdots \circ P_r(f))(x) = 0$$

puis l'injectivité de $P_2(f), \cdots, P_r(f)$ entraîne successivement :

$$(P_3(f) \circ \cdots \circ P_r(f))(x) = 0, \cdots, P_r(f)(x) = 0 \text{ et } x = 0$$

Donc Ker $(\mu_f(f)) = \{0\}$ ce qui constitue une contradiction puisque Ker $(\mu_f(f)) = E$ et $\dim(E) \geqslant 1$.

Quitte à faire une permutation, supposons que $P_1(f)$ n'est pas injectif. Soit donc $x \in$ Ker $(P_1(f)) \setminus \{0\}$. Comme $P_1(X) = X^2 - aX - b$, alors :

$$P_1(f)(x) = (f^2 - af - bf)(x) = 0$$

Donc $f^2(x) = af(x) + bx$. $\{x, f(x)\}$ est libre car sinon il existerait $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = \lambda x$ et λ serait valeur propre, ce qui contredit le fait qu'on a supposé que le spectre est vide. Donc le sous-espace vectoriel Vect$\{x, f(x)\}$ est de dimension 2 et stable par f. □

Le lemme qui suit nous dit que, pour tout automorphisme orthogonal u, on peut décomposer l'espace en une somme directe orthogonale de sous-espaces stables par u et de dimension au plus 2.

Lemme 3.8.2 *Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$. Soit $u \in \mathcal{O}(E)$. Alors il existe des sous-espaces vectoriels $E_1, \ldots, E_r$ de E de dimension égale à 1 ou 2, deux à deux orthogonaux, stables par u et tels que $E = \bigoplus_{i=1}^{r} E_i$. En particulier si $\mathrm{Sp}(u) = \emptyset$, tous les sous-espaces $E_1, \ldots, E_r$ sont de dimension 2.*

Preuve : On procède par récurrence sur la dimension $n \geqslant 1$ de E.

Pour $n = 1$ ou 2, le résultat est évident.

Supposons le résultat acquis pour tout automorphisme orthogonal d'un espace vectoriel euclidien de dimension p, $1 \leqslant p \leqslant n-1$, avec $n \geqslant 3$.

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n et $u \in \mathcal{O}(E)$. D'après le lemme précédent, il existe un sous-espace vectoriel E_1 de E non réduit à $\{0\}$ de dimension au plus égale à 2 stable par u. Or u est orthogonal, donc $E_1^\perp$ est stable par u. Comme $1 \leqslant n-2 \leqslant \dim E_1^\perp \leqslant n-1$, on peut trouver des sous-espaces vectoriels de $E_1^\perp$, $E_2, \ldots, E_r$, de dimension 1 ou 2 deux à deux orthogonaux et stables par la restriction de u à $E_1^\perp$, donc par u, tels que $E_1^\perp = \bigoplus_{i=2}^{r} E_i$. On a alors $E = E_1 \oplus E_1^\perp = \bigoplus_{i=1}^{r} E_i$. □

Maintenant, nous allons nous demander ce qui peut bien se passer sur un sous-espace de dimension 2 stable par un automorphisme orthogonal.

Pour cela posons pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad S_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

Exercice : Montrer que pour tout $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$:

$$R_{\theta_1+\theta_2} = R_{\theta_1} R_{\theta_2} \quad R_{\theta_1-\theta_2} = S_{\theta_1} S_{\theta_2} \quad S_{\theta_1+\theta_2} = R_{\theta_1} S_{\theta_2}$$

Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $R_\theta \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$ et $S_\theta \in \mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$.

Proposition 3.8.4 *Soit E un espace euclidien de dimension 2 muni d'une base orthonormale $\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$. Soit $u \in \mathcal{O}(E)$. Alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que :*

1. *si $\det(u) = 1$, Mat $_{\mathcal{B}}(u) = R_\theta$. Dans ce cas $\mathrm{Sp}(u) \neq \emptyset$ si et seulement si $u = Id_E$ (i.e. $\theta = 2k\pi$) ou $u = -Id_E$ (i.e. $\theta = (2k+1)\pi$).*
2. *si $\det(u) = -1$, Mat $_{\mathcal{B}}(u) = S_\theta$. Dans ce cas $\mathrm{Sp}(u) = \{-1, 1\}$, u est une symétrie orthogonale par rapport à la droite vectorielle $\mathbb{R}(\cos(\theta/2)\, e_1 + \sin(\theta/2))e_2$ et il existe une base orthonormale $\mathcal{B}_0$ dans laquelle Mat $_{\mathcal{B}_0}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.*

Preuve : Notons $\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$. Posons $u(e_1) = ae_1 + be_2$. Alors $a^2 + b^2 = \|u(e_1)\|^2 = \|e_1\|^2 = 1$. $a + ib$ est alors un complexe de module 1 et il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\cos\theta = a \quad \text{et} \quad \sin\theta = b$$

D'autre part, comme u préserve le produit scalaire, on a

$$\langle u(e_2), u(e_1) \rangle = \langle e_2, e_1 \rangle = 0$$

donc $u(e_2)$ appartient à la droite vectorielle $(\mathbb{R}u(e_1))^\perp$, qui est engendrée par le vecteur unitaire $-be_1 + ae_2$, et comme $u(e_2)$ est aussi un vecteur unitaire on a nécessairement $u(e_2) = \pm(-be_1 + ae_2)$. Donc :

$$\text{Mat }_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = R_\theta \quad \text{ou} \quad \text{Mat }_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} = S_\theta$$

Remarquons alors que $\det \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = a^2 + b^2 = 1$ et $\det \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} = -a^2 - b^2 = -1$.

Si Mat $_{\mathcal{B}}(u) = R_\theta$, alors $\chi_u(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda\cos\theta + 1 = (\lambda - e^{i\theta})(\lambda - e^{-i\theta})$, ce qui permet de conclure que $\mathrm{Sp}(u) \neq \emptyset$ si et seulement si $u = \mathrm{Id}_E$ (i.e. $\theta = 2k\pi$) ou $u = -\mathrm{Id}_E$ (i.e. $\theta = (2k+1)\pi$).

Si Mat $_{\mathcal{B}}(u) = S_\theta$, alors $\chi_u(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$. Donc χ_u est scindé à racines simples et u est diagonalisable et donc une symétrie orthogonale d'après le théorème 3.8.5. Il existe alors une base orthonormale $\mathcal{B}_0 = \{e'_1, e'_2\}$ dans laquelle Mat $_{\mathcal{B}_0}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. u est donc une symétrie orthogonale par rapport à Ker $(u - \mathrm{Id}_E) = \mathbb{R}e'_1$ qui est le sous-espace propre associé à la valeur propre 1.

Cherchons un vecteur propre associé à la valeur propre 1. $xe_1 + ye_2 \in \text{Ker }(u - \text{Id}_E) = \mathbb{R}e'_1$ si et seulement si :

$$(R_\theta - I_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} (\cos\theta - 1)x + \sin\theta y & = & 0 \\ \sin\theta x - (\cos\theta + 1)y & = & 0 \end{array} \right.$$

Comme $\dim(\text{Ker }(u - \text{Id}_E)) = 1$, $\text{rg }(R_\theta - I_2) = 1$ et $xe_1 + ye_2 \in \text{Ker }(u - \text{Id}_E)$ si et seulement si :

$$(\cos\theta - 1)x + \sin\theta y = 0 \Leftrightarrow -\sin^2(\theta/2)x + 2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)y = 0$$

Il s'ensuit que le vecteur $\cos(\theta/2)e_1 + \sin(\theta/2)e_2$ est une base de $\text{Ker }(u - \text{Id}_E)$. □

Remarque 3.8.1 *Si $\theta \neq k\pi$, alors en considérant R_θ comme une matrice complexe, le spectre (complexe) est* $\text{Sp}(R_\theta) = \{e^{i\theta}, e^{-i\theta}\}$.

Théorème 3.8.6 *Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \geqslant 2$. Soit $u \in \mathcal{O}(E)$. Alors il existe une b.o.n. $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de u s'écrit :*

$$\begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -I_q & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & R_{\theta_1} & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & R_{\theta_2} & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & R_{\theta_s} \end{pmatrix}$$

où, pour tout $i \in \{1, \cdots, s\}$, $\theta_i \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z}\}$ et $p = \dim(\text{Ker }(u - Id_E))$, $q = \dim(\text{Ker }(u + Id_E))$, et $p + q + 2s = n$.

Tout est prêt pour la preuve de ce théorème. Le lemme 3.8.2 nous dit que l'espace euclidien peut être décomposé en une somme directe orthogonale de sous-espaces stables par u de dimension 1 ou 2. Les vecteurs contenus dans les sous-espaces stables de dimension 1 sont des vecteurs propres de u pour les valeurs propres 1 ou -1. On met de côté les sous-espaces stables de dimension 1 pour s'occuper des sous-espaces stables de dimension 2. La matrice de la restriction de u aux sous-espaces stables de dimension 2 sera du type R_θ dans une base orthonormale. Maintenant, nous allons écrire en termes rigoureux la preuve.

Preuve : Considérons V l'orthogonal de $\text{Ker }(u - \text{Id}_E) \oplus \text{Ker }(u + \text{Id}_E)$. Comme $\text{Ker }(u - \text{Id}_E) \oplus \text{Ker }(u + \text{Id}_E)$ est stable par u, V est stable par u (d'après le point 3. du théorème 3.8.5) et $\text{Sp}(u_{|_V}) = \emptyset$. En effet si $\text{Sp}(u_{|_V}) \neq \emptyset$, comme $\text{Sp}(u_{|_V}) \subset \{-1, 1\}$ alors il existe un vecteur propre x (non nul) tel que $u(x) = x$ ou $u(x) = -x$ ce qui entraîne que $x \in \text{Ker }(u - \text{Id}_E) \oplus \text{Ker }(u + \text{Id}_E)$. Comme $\text{Ker }(u - \text{Id}_E) \oplus \text{Ker }(u +$

Id_E) et V sont en somme directe alors $x = 0$ ce qui constitue une contradiction. Donc $\mathrm{Sp}(u_{|V}) = \emptyset$ et d'après le lemme 3.8.2, il existe des sous-espaces vectoriels $E_1, \ldots, E_r$ de E de dimension 2, deux à deux orthogonaux, stables par u et tels que $V = \bigoplus_{i=1}^{r} E_i$. Choisissons des bases orthonormales $\mathcal{B}_-$, $\mathcal{B}_+$, $\mathcal{B}_1, \cdots, \mathcal{B}_r$ respectivement de Ker $(u - \mathrm{Id}_E)$, Ker $(u + \mathrm{Id}_E)$, $E_1, \cdots, E_r$. Alors $\mathcal{B} = \mathcal{B}_- \cup \mathcal{B}_+ \cup \mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_r$ est une base orthonormale de E. Pour tout $i \in \{1, \cdots, r\}$, $\mathrm{Sp}(u_{|E_i}) = \emptyset$ et d'après la proposition 3.8.4, $\mathrm{Mat}_{\,\mathcal{B}_i}(u_{|E_i}) = R_{\theta_i}$ avec $\theta_i \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \ ; \ k \in \mathbb{Z}\}$. Finalement :

$$\mathrm{Mat}_{\,\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -I_q & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & R_{\theta_1} & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & R_{\theta_2} & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & R_{\theta_s} \end{pmatrix}$$

et $\dim(\mathrm{Ker}\ (u - \mathrm{Id}_E)) = p$ et $\dim(\mathrm{Ker}\ (u + \mathrm{Id}_E)) = q$.

□

Remarque 3.8.2 *Le polynôme caractéristique de u est :*

$$\begin{aligned} \chi_u(\lambda) &= (1-\lambda)^p(-1+\lambda)^q \prod_{j=1}^{s} (\lambda^2 - 2\lambda\cos(\theta_j) + 1) \\ &= (1-\lambda)^p(-1+\lambda)^q \prod_{j=1}^{s} (\lambda - e^{i\theta_j})(\lambda - e^{-i\theta_j}) \end{aligned}$$

Corollaire 3.8.5 *Soit A une matrice orthogonale de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Alors il existe une matrice orthogonale P telle que :*

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -I_q & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & R_{\theta_1} & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & R_{\theta_2} & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & R_{\theta_s} \end{pmatrix}$$

où, pour tout $i \in \{1, \cdots, s\}$, $\theta_i \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \ ; \ k \in \mathbb{Z}\}$ et $p = \dim(\mathrm{Ker}\ (A - I_n))$, $q = \dim(\mathrm{Ker}\ (A + I_n))$, et $p + q + 2s = n$.

Remarque 3.8.3 *Remarquons que $u \in \mathcal{SO}(E)$ si et seulement si q est pair.*

Chapitre 4

Géométrie euclidienne

4.1 Orientation d'un espace vectoriel de dimension finie

Cette notion est nécessaire pour lever certaines ambiguïtés, comme par exemple pour définir correctement la notion d'angle ou le produit vectoriel. Cela revient à se choisir de "bonnes" bases qui seront appelées directes tandis que les "mauvaises" bases seront dites indirectes.

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie n. Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E, on note $P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. $P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ n'est rien d'autre que la matrice $\mathrm{Mat}_{\,(\mathcal{B}',\mathcal{B})}(\mathrm{Id}_E)$. On a alors :

$$P_{\mathcal{B}\mathcal{B}} = I_n \quad , \quad P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = (P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'})^{-1} \quad , \quad \det(P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}) \neq 0$$

Si $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$, $\mathcal{B}''$ sont trois bases de E alors :

$$P_{\mathcal{B}\mathcal{B}''} = P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}''}$$

Théorème 4.1.1 *Sur l'ensemble des bases de E, la relation :*

$$\mathcal{B} \sim \mathcal{B}' \quad si \quad \det(P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}) > 0$$

est une relation d'équivalence comportant exactement deux classes d'équivalence.

Preuve :

— La relation est évidemment réflexive, puisque $\det(P_{\mathcal{B}\mathcal{B}}) = \det I_n = 1 > 0$.

— La relation est symétrique puisque si $\det(P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}) > 0$, alors :

$$\det(P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}) = \det(P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}^{-1}) = \frac{1}{\det(P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'})} > 0$$

— La relation est transitive puisque si $\det(P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}) > 0$ et $\det(P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}''}) > 0$, alors :

$$\det(P_{\mathcal{B}\mathcal{B}''}) = \det(P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}''}) = \det(P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'})\det(P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}''}) > 0$$

Montrons maintenant qu'il n'y a que deux classes d'équivalence.

Soit $\mathcal{B} = \{e_i\}_{1\leqslant i\leqslant n}$ une base de E fixée. Considérons alors la base $\mathcal{B}^- := \{-e_1, \cdots, e_n\}$. Alors :

$$\det(P_{\mathcal{B}\mathcal{B}^-}) = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}^-) = \det_{\mathcal{B}}(-e_1, e_2, \cdots, e_n) = -\det_{\mathcal{B}}(e_1, e_2, \cdots, e_n) = -\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) < 0$$

Donc $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}^-$ appartiennent à deux classes différentes. Soit $\mathcal{B}'$ une autre base.

— Si $\det(P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}) > 0$, alors $\mathcal{B}' \sim \mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ est dans la classe de $\mathcal{B}$.

— Si $\det(P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}) < 0$, alors :

$$\begin{aligned}\det(P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}^-}) &= \det(P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}P_{\mathcal{B}\mathcal{B}^-})\\ &= \det(P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}})\det(P_{\mathcal{B}\mathcal{B}^-}) = \det(P^{-1}_{\mathcal{B}\mathcal{B}'})\det(P_{\mathcal{B}\mathcal{B}^-})\\ &= \frac{\det(P_{\mathcal{B}\mathcal{B}^-})}{\det(P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'})} > 0\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{B}' \sim \mathcal{B}^-$ et $\mathcal{B}'$ est dans la classe $\mathcal{B}^-$.

Ceci prouve qu'il n'y a que deux classes d'équivalence. □

Définition 4.1.1 ***Choisir une orientation*** *de E ou* ***orienter*** *E revient à choisir une base $\mathcal{B}_0$ de E. Dans ce cas les bases de la classe à laquelle appartient $\mathcal{B}$ sont dites* ***bases directes****, les autres* ***bases indirectes****.*

La proposition précédente nous dit qu'il n'y a que deux orientations possibles pour E.

Remarque 4.1.1 *Si on choisit une orientation en choisissant une base $\mathcal{B}_0$, alors une base $\mathcal{B}$ sera* ***directe*** *si et seulement si $\det(P_{\mathcal{B}_0\mathcal{B}}) > 0$.*

Proposition 4.1.1 *Un espace vectoriel euclidien orienté admet une base orthonormale directe.*

PREUVE : Supposons que E est orienté par une base $\mathcal{B}_0$. Soit $\mathcal{B} = \{e_i\}_{1\leqslant i\leqslant n}$ une b.o.n. de E. Si $\mathcal{B}$ est directe alors c'est une b.o.n. directe. Sinon $\mathcal{B}$ est indirecte et dans ce cas la base $\mathcal{B}^- := \{-e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ est une base orthonormale de E et :

$$\det(P_{\mathcal{B}_0\mathcal{B}^-}) = \det_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}^-) = -\det_{\mathcal{B}_0}(e_1, e_2, \cdots, e_n) = -\det(P_{\mathcal{B}_0\mathcal{B}}) > 0$$

□

Désormais E est un espace vectoriel euclidien de dimension n.

Voici ci-dessous un énoncé important. Si P est une matrice de passage entre deux bases orthonormales alors P est orthogonale d'après le chapitre précédent et $\det(P) = \pm 1$.

Proposition 4.1.2 *On suppose que E est orienté. Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases orthonormales de E. Alors $\det(P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}) = \pm 1$. De plus $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ ont la même orientation si et seulement si $\det(P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}) = 1$.*

PREUVE : On a vu dans le chapitre précédent que puisque $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont orthonormales, alors $P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ est une matrice orthogonale. Donc $\det(P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}) = \pm 1$. □

Définition 4.1.2 *Soit H un hyperplan de E. Alors on dit qu'un vecteur a de E est un **vecteur normal** à H si $\{a\}$ est une base de $H^{\perp}$. Si de plus $\|a\| = 1$, alors on dira que a est un **vecteur normal unitaire**.*

L'énoncé qui suit nous dit tout simplement que pour tout hyperplan H, le choix d'un vecteur normal unitaire induit une orientation de H. Cette notion sera importante pour définir sans ambiguïté la notion de rotation axiale en dimension 3.

Proposition 4.1.3 *Supposons que E est orienté. Soient H un hyperplan de E et a un vecteur normal. Alors il existe une unique orientation de H telle que pour toute b.o.n. directe $\{e_1, \ldots, e_{n-1}\}$ de H, la famille $\left\{e_1, \ldots, e_{n-1}, \dfrac{a}{\|a\|}\right\}$ est une b.o.n. directe de E. On dira alors que l'hyperplan H est **orienté** par le vecteur normal a.*

PREUVE : Soit $\mathcal{B}_0 := \{\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{n-1}\}$ une base de H. Alors comme $E = H \oplus \mathbb{R}a$, $\overline{\mathcal{B}}_0 := \left\{\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{n-1}, \dfrac{a}{\|a\|}\right\}$ est une base de E Comme cela a été vu plus haut, quitte à changer le signe du premier vecteur de $\mathcal{B}_0$, on peut supposer que $\overline{\mathcal{B}}_0$ est une base directe. Soit $\mathcal{B} := \{e_1, \ldots, e_{n-1}\}$ une b.o.n. de H, alors $\overline{\mathcal{B}} := \left\{e_1, \ldots, e_{n-1}, \dfrac{a}{\|a\|}\right\}$ est une base orthonormée de E et :

$$\det(P_{\mathcal{B}_0\mathcal{B}}) = \det \begin{pmatrix} P_{\mathcal{B}_0\mathcal{B}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \det(P_{\overline{\mathcal{B}}_0\overline{\mathcal{B}}})$$

Donc $\overline{\mathcal{B}}_0$ est une base directe de E si et seulement si $\det(P_{\mathcal{B}_0\mathcal{B}}) > 0$. Autrement dit $\overline{\mathcal{B}}_0$ est une base directe si et seulement si $\mathcal{B}$ est dans la classe de $\mathcal{B}_0$. □

4.2 Produit mixte, produit vectoriel

Dans toute la suite $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ est un espace euclidien orienté de dimension $n \geqslant 1$.

Soit $\mathcal{B} := \{e_1, \cdots, e_n\}$ une base de E. On rappelle que $\det_{\mathcal{B}}$ désigne l'unique n-forme linéaire alternée telle que $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$. D'autre part l'espace des n-formes linéaires alternées est de dimension 1. Plus précisément pour toute n-forme linéaire alternée v on a (voir cours d'algèbre linéaire du S3) :

$$\forall (u_1, \cdots, u_n) \in E^n, v(u_1, \cdots, u_n) = v(e_1, \cdots, e_n)\det_{\mathcal{B}}(u_1, \cdots, u_n)$$

La proposition qui suit nous montre qu'on a besoin de l'orientation pour définir le produit mixte.

Proposition 4.2.1 *Soient $v_1, \cdots, v_n$ des vecteurs de E et soit $\mathcal{B}$ une b.o.n. directe de E. Alors le scalaire :*

$$\det_{\mathcal{B}}(v_1, \cdots, v_n)$$

est indépendant du choix de la b.o.n. ***directe*** *$\mathcal{B}$ et s'appelle le* ***produit mixte*** *des n vecteurs $v_1, \cdots, v_n$. On note :*

$$[v_1, \cdots, v_n] = \det_{\mathcal{B}}(v_1, \cdots, v_n)$$

PREUVE : Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases orthonormales directes. Alors :

$$\begin{aligned} \det_{\mathcal{B}'}(v_1, \cdots, v_n) &= \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})\det_{\mathcal{B}}(v_1, \cdots, v_n) \\ &= \det(\text{Mat }_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}))\det_{\mathcal{B}}(v_1, \cdots, v_n) \\ &= \det(P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}})\det_{\mathcal{B}}(v_1, \cdots, v_n) \end{aligned}$$

Et comme $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases orthonormales directes, $\det(P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}) = 1$. $\square$

Donc $\det_{\mathcal{B}}(v_1, \cdots, v_n)$ ne dépend pas du choix de la base orthonormale directe. Maintenant si $\mathcal{B}$ est une base orthonormale directe et $\mathcal{B}'$ une base orthonormale indirecte, alors :

$$\det_{\mathcal{B}'}(v_1, \cdots, v_n) = -\det_{\mathcal{B}}(v_1, \cdots, v_n)$$

On voit que l'on a un changement de signe, d'où l'importance d'avoir une orientation et de ne travailler qu'avec des bases directes.

Proposition 4.2.2 *Soient $(v_1, \cdots, v_n) \in E^n$. Alors $\{v_1, \cdots, v_n\}$ est une base de E si et seulement si $[v_1, \cdots, v_n] \neq 0$. En particulier $\{v_1, \cdots, v_n\}$ est une base directe de E si et seulement si $[v_1, \cdots, v_n] > 0$.*

Proposition 4.2.3 *Soient $(v_1, \cdots, v_n) \in E^n$. Si $\{v_1, \cdots, v_n\}$ est une base orthonormale directe (resp. indirecte) de E alors $[v_1, \cdots, v_n] = 1$ (resp. $[v_1, \cdots, v_n] = -1$).*

Théorème 4.2.1 *Supposons $n \geqslant 2$. Pour tout $(v_1, \cdots, v_{n-1}) \in E^{n-1}$, il existe un unique vecteur $z \in E$ tel que pour tout $x \in E$, $[v_1, \cdots, v_{n-1}, x] = \langle z, x\rangle$.*

PREUVE : Considérons l'application :

$$\begin{array}{cccc} \Phi & : & E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & \Phi(x) := [v_1, \cdots, v_{n-1}, x] \end{array}$$

Alors Φ est une forme linéaire. D'après le théorème 3.6.1 et la remarque 3.6.1 du chapitre précédent, il existe un unique vecteur z tel que pour tout $x \in E$, $\Phi(x) = \langle z, x\rangle$. $\square$

Définition 4.2.1 *Soient $(v_1, \cdots, v_{n-1}) \in E^{n-1}$, alors l'unique vecteur $z \in E$ tel que pour tout $x \in E$, $[v_1, \cdots, v_{n-1}, x] = \langle z, x\rangle$ s'appelle le* ***produit vectoriel*** *de $v_1, \cdots, v_{n-1}$. On note :*

$$z = v_1 \wedge \cdots \wedge v_{n-1}$$

Théorème 4.2.2 *1. Le produit vectoriel est une application $(n-1)$-linéaire alternée de E^{n-1} dans E.*

2. Pour tout $(v_1, \cdots, v_{n-1}) \in E^{n-1}$, le vecteur $v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_{n-1}$ est orthogonal à Vect$\{v_1, \cdots, v_{n-1}\}$.

3. Soit $(v_1, \cdots, v_{n-1}) \in E^{n-1}$, alors $v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_{n-1} = 0_E$ si et seulement si la famille $\{v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}\}$ est liée.

4. Si la famille $\{v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}\}$ est libre alors la famille :

$$\{v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}, v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_{n-1}\}$$

est une base directe de E.

5. Si $\{v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}\}$ est famille orthonormale, alors la famille :

$$\{v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}, v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_{n-1}\}$$

est une b.o.n. directe de E.

Preuve :

1. Soit $\mathcal{B} := \{e_1, \cdots, e_n\}$ une base orthonormale de E. Alors pour tout $(v_1, \cdots, v_{n-1}) \in E^{n-1}$:

$$\begin{aligned} v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_{n-1} &= \sum_{i=1}^{n} \langle v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_{n-1}, e_i \rangle e_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} [v_1, \cdots, v_{n-1}, e_i] e_i \end{aligned}$$

Or pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$, l'application :

$$\begin{array}{ccc} E^{n-1} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (v_1, \cdots, v_{n-1}) & \longmapsto & [v_1, \cdots, v_{n-1}, e_i] \end{array}$$

est multilinéaire alternée ce qui permet de conclure.

2. Pour tout $i \in \{1, \cdots, n-1\}$ on a :

$$\langle v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_{n-1}, v_i \rangle = [v_1, \cdots, v_{n-1}, v_i] = 0$$

car le déterminant est alterné. Donc $v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_{n-1}$ est orthogonal à Vect$\{v_1, \cdots, v_{n-1}\}$.

3. Si la famille $\{v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}\}$ est liée, il en est de même de la famille $\{v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}, x\}$ pour tout $x \in E$ et

$$\langle v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_{n-1}, x \rangle = [v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}, x] = 0$$

donc $v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_{n-1} \in E^\perp = \{0\}$.
Si la famille $\{v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}\}$ est libre, on peut la compléter en une base de E par un vecteur x de E. Dans ce cas on a :

$$\langle v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_{n-1}, x\rangle = [v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}, x] \neq 0$$

ce qui entraîne que $v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_{n-1} \neq 0$.

4. Si la famille $\{v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}\}$ est libre, on a $v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_{n-1} \neq 0$, donc

$$[v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}, v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_{n-1}) = \|v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_{n-1}\|^2 > 0$$

et $\{v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}, v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_{n-1}\}$ est une base directe de E.

5. Si la famille $\{v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}\}$ est orthonormale, alors elle est libre et :

$$\{v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}, v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_{n-1}\}$$

est une b.o.n. directe de E. De plus $v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_{n-1}$ est orthogonal à l'hyperplan H engendré par $\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$. On complète $\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ par un vecteur unitaire x en une b.o.n. directe de E. On a alors $x \in H^\perp$ et $\|x\| = 1$. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$, tel que $v_1 \wedge \cdots \wedge v_{n-1} = \lambda x$. On a alors :

$$\lambda = \langle v_1 \wedge \cdots \wedge v_{n-1}, x\rangle = [x_1, \ldots, x_{n-1}, x] = 1$$

donc $\lambda = 1$ et $v_1 \wedge \cdots \wedge v_{n-1} = x$.

□

4.2.1 Produit vectoriel en dimension 3

Désormais $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ est un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3. Si on résume les différentes propriétés énoncées plus haut on a :

À SAVOIR ABSOLUMENT :

1. **$\forall (u, v) \in E^2$, $u \wedge v$ est l'unique vecteur tel que : $\forall w \in E$, $\langle u \wedge v, w\rangle = [u, v, w]$.**
2. **$\forall (u, v) \in E^2 \quad , \quad u \wedge v = -v \wedge u$.**
3. **$\forall (u, v, w) \in E^3 \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad , \quad (\lambda u + v) \wedge w = \lambda(u \wedge w) + (v \wedge w)$.**
4. **$\forall (u, v) \in E^2$ $u \wedge v$ est orthogonal à u et à v.**
5. **$\forall (u, v) \in E^2$, $u \wedge v = 0$ si et seulement si u et v sont colinéaires.**
6. **si u et v sont deux vecteurs linéairement indépendants, alors $\{u, v, u \wedge v\}$ est une base directe de E.**
7. **si $\{u, v\}$ est une famille orthonormale de E, alors $\{u, v, u \wedge v\}$ est une base orthonormale directe de E.**

Proposition 4.2.4 *Soit $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ une base orthonormale directe de E. Soient $u = \sum_{i=1}^{3} u_i e_i$ et $v = \sum_{i=1}^{3} v_i e_i$. Alors on a :*

$$u \wedge v = \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} e_3$$

Preuve : On a :

$$\begin{aligned} u \wedge v &= \langle u \wedge v, e_1\rangle e_1 + \langle u \wedge v, e_2\rangle e_2 + \langle u \wedge v, e_3\rangle e_3 \\ &= [u, v, e_1]e_1 + [u, v, e_2]e_2 + [u, v, e_3]e_3 \\ &= \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & 1 \\ u_2 & v_2 & 0 \\ u_3 & v_3 & 0 \end{vmatrix} e_1 + \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & 0 \\ u_2 & v_2 & 1 \\ u_3 & v_3 & 0 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & 0 \\ u_2 & v_2 & 0 \\ u_3 & v_3 & 1 \end{vmatrix} e_3 \\ &= \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} e_3 \end{aligned}$$

□

Proposition 4.2.5 *Soit $(u, v) \in E^2$. Alors :*

$$\|u \wedge v\|^2 + \langle u, v\rangle^2 = \|u\|^2 \|v\|^2$$

En particulier si u et v sont orthogonaux alors $\|u \wedge v\| = \|u\|\|v\|$.

Preuve : voir exercice 6.

□

4.3 Isométries vectorielles

$(E, \langle\ ,\ \rangle)$ est un espace euclidien.

Définition 4.3.1 *Une application $g : E \longrightarrow E$ est une **isométrie** si elle conserve la distance, c'est-à-dire si :*

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad , \quad \|g(x) - g(y)\| = \|x - y\|$$

Théorème 4.3.1 *Soient $(E, \langle\ \ ,\ \ \rangle)$ un espace euclidien et $g : E \to E$ une isométrie. Alors il existe un automorphisme orthogonal f tel que pour tout $x \in E$:*

$$g(x) = g(0) + f(x)$$

Autrement dit les isométries sont à une translation près des automorphismes orthogonaux.
PREUVE : En TD. □

Dans la suite les automorphismes orthogonaux seront aussi appelés **isométries vectorielles** ou **linéaires**.

Définition 4.3.2 *Soit $f \in \mathcal{O}(E)$. Alors :*

1. *On dit que f est une **isométrie directe** si $f \in \mathcal{SO}(E)$.*
2. *On dit que f est une **isométrie indirecte** si $f \in \mathcal{O}(E) \setminus \mathcal{SO}(E)$.*

4.4 Groupe orthogonal en dimension 2

Dans ce paragraphe $(E, \langle \ \ , \ \ \rangle)$ est un espace euclidien orienté de dimension 2 muni d'une base orthonormale directe $\mathcal{B} := \{e_1, e_2\}$.

On rappelle que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on note :

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad S_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

Remarquons que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\det(R_\theta) = 1$ et $(R_\theta)^{-1} = R_{-\theta}$. D'autre part pour tout $(\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$R_{\theta_1} R_{\theta_2} = R_{\theta_1+\theta_2} = R_{\theta_2} R_{\theta_1}$$

La proposition suivante découle de la proposition 3.8.4.

Proposition 4.4.1 *Soit $f \in \mathcal{O}(E)$. Alors :*

1. *si $f \in \mathcal{SO}(E)$, il existe un unique $\theta \in \mathbb{R}$ (mod 2π) tel que Mat $_{\mathcal{B}}(f) = R_\theta$.*
2. *si $f \in \mathcal{O}(E) \setminus \mathcal{SO}(E)$, alors f est la symétrie orthogonale par rapport à la droite vectorielle* Ker $(f - Id_E)$. *On dira aussi que f est une **réflexion** par rapport à* Ker $(f - Id_E)$.

Corollaire 4.4.1 *Soit $f \in \mathcal{SO}(E)$. Alors la matrice de f dans une base orthonormale directe ne dépend du choix de celle-ci. Plus précisément, il existe un unique $\theta \in \mathbb{R}$ (mod 2π) tel que pour toute base orthonormale directe $\mathcal{B}$, Mat $_{\mathcal{B}}(f) = R_\theta$.*

PREUVE : Soit $\mathcal{B}_0$ une base orthonormale directe. Alors d'après la proposition précédente il existe un unique $\theta \in \mathbb{R}$ (mod 2π) tel que Mat $_{\mathcal{B}_0}(f) = R_\theta$. Soit $\mathcal{B}$ une autre base orthonormale directe de E. Alors $P_{\mathcal{B}_0\mathcal{B}}$ est une matrice orthogonale d'après le corollaire 3.8.2 et on a $\det(P_{\mathcal{B}_0\mathcal{B}}) = \pm 1$. Comme $\mathcal{B}_0$ et $\mathcal{B}$ sont deux bases directes, $\det(P_{\mathcal{B}_0\mathcal{B}}) = 1$ et $P_{\mathcal{B}_0\mathcal{B}} \in \mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$. La matrice $P_{\mathcal{B}_0\mathcal{B}}$ peut être vue comme la matrice d'un automorphisme orthogonal de $\mathcal{SO}(E)$ dans la base $\mathcal{B}_0$. Donc il existe $\theta' \in \mathbb{R}$ tel que $P_{\mathcal{B}_0\mathcal{B}} = R_{\theta'}$ et :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = (R_{\theta'})^{-1} R_\theta R_{\theta'} = R_{-\theta'} R_\theta R_{\theta'} = R_{-\theta'+\theta+\theta'} = R_\theta$$

□

Définition 4.4.1 *Soit $f \in \mathcal{SO}(E)$. Alors l'unique $\theta \in \mathbb{R}$ (mod 2π) tel que dans toute base orthonormale directe Mat $_{\mathcal{B}}(f) = R_\theta$ s'appelle l'**angle** de la rotation f et f s'appelle **rotation d'angle** θ.*

Remarque 4.4.1 *La proposition 3.8.4 dit que dans le cas où $f \in \mathcal{O}(E) \setminus \mathcal{SO}(E)$, alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ (mod 2π) tel que Mat $_{\mathcal{B}}(f) = S_\theta$ et f est la symétrie orthogonale par rapport à la droite vectorielle $\mathbb{R}(\cos(\theta/2)\, e_1 + \sin(\theta/2))e_2$. Mais θ dépend de la base orthonormale choisie.*

CE QU'IL FAUT RETENIR : Soient E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 2 muni d'une base orthonormale directe $\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$ et f un endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

1. **Pour savoir si f est un automorphisme orthogonal, on vérifie que A est une matrice orthogonale.**
2. **Pour connaître la nature de f :**
   (a) **Si $\det(A) = 1$ ou si f n'est pas symétrique, alors f est une rotation. On a $A = R_\theta$, ce qui donne l'angle de la rotation.**
   (b) **Si $\det(A) = -1$ ou si f est symétrique, $\dim(\mathrm{Ker}\ (f - \mathbf{Id}_E) = 1$ et f est une réflexion par rapport à la droite $\mathrm{Ker}\ (f - \mathbf{Id}_E)$.**

Exemples : E est un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 2 muni d'une base orthonormale directe $\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$. f est un endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est donnée par :

1. $A = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$. Alors A est orthogonale, donc f est un automorphisme orthogonale. De plus $\det(A) = 1$, donc f est une rotation et il existe θ tel que $A = R_\theta$. Or $A = R_{\pi/3}$. Donc f est une rotation d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.
2. $B = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$. Alors B est orthogonale, donc f est un automorphisme orthogonale. De plus $\det(B) = -1$, donc f est une réflexion par rapport à la droite $\mathrm{Ker}\ (f - \mathrm{Id}_E)$. On peut trouver une base de $\mathrm{Ker}\ (f - \mathrm{Id}_E)$ soit en résolvant le système $(B - I_2)X = 0$, soit en remarquant que $B = S_{\pi/3}$. Dans ce cas, comme cela a été rappelé dans la remarque 4.4.1, $\mathrm{Ker}\ (f - \mathrm{Id}_E) = \mathbb{R}(\cos(\pi/6)e_1 + \sin(\pi/6))e_2 = \mathbb{R}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}e_1 + \dfrac{1}{2}e_2\right)$.

4.5 Groupe orthogonal en dimension 3

Dans ce paragraphe $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ est un espace euclidien orienté de dimension 3.

Définition 4.5.1 *Soient u un vecteur unitaire de E et $P = (\mathbb{R}u)^\perp$ orienté par u.*

1. *On appelle **rotation axiale** d'**axe** $\mathbb{R}u$ orienté par u et d'**angle** θ, l'endomorphisme $r_{u,\theta}$ de E défini par :*
$$r_{u,\theta} = (r_\theta \circ p_P) + p_{\mathbb{R}u}$$
où r_θ est la rotation d'angle θ définie dans la plan orienté P. Plus précisément pour tout $x \in E$:
$$r_{u,\theta}(x) = r_\theta(p_P(x)) + p_{\mathbb{R}u}(x)$$
*Dans le cas où $\theta = \pi \pmod{2\pi}$, on dira aussi que $r_{u,\theta}$ est un **retournement** ou un **demi-tour** d'axe $\mathbb{R}u$.*
2. *On appelle **réflexion** par rapport à P la symétrie orthogonale s_P par rapport à P.*
3. *On appelle **antirotation** ou **rotation-réflexion** d'axe $\mathbb{R}u$ orienté par u et d'angle $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z}\}$, la composée de $r_{u,\theta}$ par la réflexion s_P.*

Remarque 4.5.1 *Notons $e_1 = u$ et choisissons $\{e_2, e_3\}$ pour que $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ soit une base orthonormale directe. Alors :*
$$Mat\ (r_{u,\theta}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \text{ et } Mat\ (s_P) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
En particulier :
$$Mat\ (r_{u,\pi}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
ce qui permet de conclure qu'un demi-tour est aussi une symétrie orthogonale par rapport à l'axe $\mathbb{R}u$. Pour tout θ, la matrice de $r_{u,\theta}$ étant orthogonale, on en déduit que $r_{u,\theta}$ est un automorphisme orthogonal.

De plus $r_{u,\theta|P} = r_\theta$ et pour $\theta \neq 0 \pmod{2\pi}$, $\dim(\mathrm{Ker}\ (r_{u,\theta} - Id_E)) = 1$ *(car $\chi_{r_{u,\theta}}(\lambda) = (1-\lambda)\chi_{r_\theta}(\lambda)$ et d'après la proposition 3.8.4, pour $\theta \neq k\pi$, $\mathrm{Sp}(r_\theta) = \emptyset$ et $\mathrm{Sp}(r_\pi) = \{-1\}$ donc 1 est une valeur propre de multiplicité 1) et* $\mathrm{Ker}\ (r_{u,\theta} - Id_E) = \mathbb{R}u$.

D'autre part :
$$Mat\ (r_{u,\theta} \circ s_P) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = Mat\ (s_P \circ r_{u,\theta})$$
donc $r_{u,\theta} \circ s_P = s_P \circ r_{u,\theta}$ et une antirotation est un automorphisme orthogonal.

Si $\theta = \pi$, alors $r_{u,\pi} \circ s_P = -Id_E$. On parle alors de ***symétrie centrale*** *(il s'agit en fait d'une symétrie orthogonale par rapport à $\{0\}$).*

De plus pour $\theta \neq \pi \pmod{2\pi}$, alors on a $\dim(\mathrm{Ker}\ (r_{u,\theta} \circ s_P + Id_E)) = 1$ (car $\chi_{r_{u,\theta}}(\lambda) = (-1-\lambda)\chi_{r_\theta}(\lambda)$ et par des arguments identiques à ceux utilisés plus haut -1 est une valeur propre de multiplicité 1) et $\mathrm{Ker}\ (r_{u,\theta} \circ s_P + Id_E) = \mathbb{R}e_1$.

Théorème 4.5.1 *Soit $f \in \mathcal{O}(E)$. Alors :*

1. *si $f \in \mathcal{SO}(E)$ et si $f \neq Id_E$, f est une rotation axiale d'axe $\mathrm{Ker}\ (f - Id_E)$.*
2. *si $f \in \mathcal{O}(E) \backslash \mathcal{SO}(E)$, f est une réflexion par rapport au plan vectoriel $\mathrm{Ker}\ (f - Id_E)$ ou f est une antirotation d'axe $\mathrm{Ker}\ (f + Id_E)$.*

Preuve : D'après le théorème 3.8.6 du chapitre précédent, si $f \in \mathcal{O}(E)$, alors il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$ telle que la matrice A de f dans la base $\mathcal{B}$ vérifie :

$$A = I_3 \text{ ou } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ ou } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ ou } A = -I_3$$

ou il existe $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z}\}$ tel que :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \text{ ou } A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Quitte à changer un des vecteurs de la base en son opposé, on peut supposer que $\mathcal{B}$ est directe.

1. Si $\det(f) = 1$. Alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ et si $\theta \neq 0$, f est une rotation axiale d'axe $\mathbb{R}e_1 = \mathrm{Ker}\ (f - \mathrm{Id}_E)$ orienté par e_1 et d'angle θ.
2. Si $\det(f) = -1$. Alors :
   (a) soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et f est la réflexion par rapport au sous-espace $\mathrm{Vect}\{e_1, e_2\} = \mathrm{Ker}\ (f - \mathrm{Id}_E)$.
   (b) soit il existe $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z}\}$ tel que : $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ et f est une antirotation d'angle θ et d'axe $\mathrm{Vect}\{e_1\} = \mathrm{Ker}\ (f + \mathrm{Id}_E)$ orienté par e_1. Plus précisément, $f = r_{e_1,\theta} \circ s_{\mathrm{Vect}\{e_2,e_3\}} = s_{\mathrm{Vect}\{e_2,e_3\}} \circ r_{e_1,\theta}$.

$\square$

Proposition 4.5.1 *Soit Δ une droite vectorielle dirigée et orientée par u. Soit v non colinéaire à u. Alors :*

1. *Si f est une rotation axiale d'axe Δ dirigé et orienté par u et d'angle θ alors :*
   (a) *tr $(f) = 1 + 2\cos(\theta)$.*
   (b) *$[v, f(v), u]$ est du signe de $\sin(\theta)$.*
2. *Si f est une antirotation axiale d'axe Δ dirigé et orienté par u et d'angle θ, alors :*
   (a) *tr $(f) = -1 + 2\cos(\theta)$.*
   (b) *$[v, f(v), u]$ est du signe de $\sin(\theta)$.*

Preuve : La trace d'un endomorphisme est donnée par la trace de sa matrice dans une base quelconque (la trace étant indépendante du choix de la base). Donc d'après la remarque 4.5.1 on a immédiatement 1. (a) et 2. (a).

Puisque v n'est pas colinéaire à u, alors $p_{(\mathbb{R}u)^\perp}(v) \neq 0$. Donc posons $e_1 = \dfrac{u}{\|u\|}$, $e_2 = \dfrac{p_{(\mathbb{R}u)^\perp}(v)}{\|p_{(\mathbb{R}u)^\perp}(v)\|}$ et $e_3 = e_1 \wedge e_2$. Alors $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ est une base orthonormale directe et pour une rotation axiale ou une antirotation on a :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Maintenant $v = p_{(\mathbb{R}u)^\perp}(v) + \langle v, e_1\rangle e_1 = \langle v, e_1\rangle e_1 + \|p_{(\mathbb{R}u)^\perp}(v)\| e_2$. Donc les coordonnées de v et $f(v)$ dans $\mathcal{B}$ sont respectivement :

$$\begin{pmatrix} \langle v, e_1\rangle \\ \|p_{(\mathbb{R}u)^\perp}(v)\| \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \pm\langle v, e_1\rangle \\ \|p_{(\mathbb{R}u)^\perp}(v)\| \cos\theta \\ \|p_{(\mathbb{R}u)^\perp}(v)\| \sin\theta \end{pmatrix}$$

Donc :

$$[v, f(v), u] = \begin{vmatrix} \langle v, e_1\rangle & \pm\langle v, e_1\rangle & \|u\| \\ \|p_{(\mathbb{R}u)^\perp}(v)\| & \|p_{(\mathbb{R}u)^\perp}(v)\| \cos\theta & 0 \\ 0 & \|p_{(\mathbb{R}u)^\perp}(v)\| \sin\theta & 0 \end{vmatrix} = \|u\| \|p_{(\mathbb{R}u)^\perp}(v)\|^2 \sin\theta$$

Donc $[v, f(v), u]$ est du signe de $\sin(\theta)$. □

CE QU'IL FAUT RETENIR : Soient E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3 muni d'une base orthonormale directe $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ et f un endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est A.

1. **Pour savoir si f est un automorphisme orthogonal, on vérifie que A est une matrice orthogonale.**

2. **Pour connaître la nature de f :**
   (a) **Si A est symétrique, alors f est une symétrie orthogonale par rapport à $\mathrm{Ker}\ (f - \mathbf{Id}_E)$. Plus précisément f est soit un demi-tour (i.e. symétrie orthogonale par rapport à une droite vectorielle ou rotation axiale d'angle π), soit une réflexion (i.e. symétrie orthogonale par rapport à un plan vectoriel).**
   - **si $\dim(\mathrm{Ker}\ (f - \mathbf{Id}_E)) = 1$, f est un demi-tour d'axe $\mathrm{Ker}\ (f - \mathbf{Id}_E)$.**
   - **si $\dim(\mathrm{Ker}\ (f - \mathbf{Id}_E)) = 2$, f est une réflexion par rapport au plan vectoriel $\mathrm{Ker}\ (f - \mathbf{Id}_E)$.**

   On peut aussi trancher en calculant $\det(A)$, mais ce n'est pas nécessaire (si $\det(A) = 1$, f est un demi-tour et si $\det(A) = -1$ f est une réflexion).

   (b) **si A n'est pas symétrique, alors f est soit une rotation axiale, soit une antirotation. Pour trancher, il est nécessaire de calculer $\det(A)$.**
   - **si $\det(A) = 1$, alors f est une rotation axiale, $\dim(\mathrm{Ker}\ (f - \mathbf{Id}_E)) = 1$ et l'axe de la rotation est $\mathrm{Ker}\ (f - \mathbf{Id}_E)$. On oriente l'axe par un vecteur $u \in \mathrm{Ker}\ (f - \mathbf{Id}_E)$. Pour trouver l'angle :**
     - **tr $(A) = 1 + 2\cos\theta$.**
     - **on choisit un vecteur v non colinéaire à u et $[v, f(v), u]$ est du signe de $\sin\theta$.**
   - **si $\det(A) = -1$, alors f est une antirotation, $\dim(\mathrm{Ker}\ (f + \mathbf{Id}_E)) = 1$ et l'axe de l'antirotation est $\mathrm{Ker}\ (f + \mathbf{Id}_E)$. On oriente l'axe par un vecteur $u \in \mathrm{Ker}\ (f + \mathbf{Id}_E)$. Pour trouver l'angle :**
     - **tr $(A) = -1 + 2\cos\theta$.**
     - **on choisit un vecteur v non colinéaire à u et $[v, f(v), u]$ est du signe de $\sin\theta$.**

     Dans ce cas $f = s_{(\mathbb{R}u)^\perp} \circ r_{\mathbb{R}u,\theta} = r_{\mathbb{R}u,\theta} \circ s_{(\mathbb{R}u)^\perp}$.

Exemples : Dans toute la suite E est un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3 muni d'une base orthonormale directe $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$. f est un endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est donnée par :

1. $A = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 1 - 2\sqrt{2} & 2 + \sqrt{2} \\ 1 + 2\sqrt{2} & -1 & 2 - \sqrt{2} \\ 2 - \sqrt{2} & 2 + \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}$.

   On vérifie d'abord que A est une matrice orthogonale. Si on note C_1, C_2, C_3 les colonnes de A, alors pour le produit scalaire canonique sur les matrices colonnes, on vérifie que :
$$\langle C_1, C_2\rangle = \langle C_2, C_3\rangle = \langle C_3, C_1\rangle = 0$$
$$\|C_1\|^2 = \|C_2\|^2 = \|C_3\|^2 = 1$$

A n'est pas symétrique donc f n'est ni une réflexion (i.e. symétrie orthogonale par rapport à un plan), ni un demi-tour ou retournement (i.e. symétrie orthogonale par rapport à une droite ou rotation axiale d'angle π). Donc f est soit une rotation axiale (d'angle $\theta \neq \pi \pmod{2\pi}$ puisque ce n'est pas un demi-tour), soit une antirotation.

Calculons $\det(A)$:

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \frac{1}{4^3}\begin{vmatrix} -1 & 1-2\sqrt{2} & 2+\sqrt{2} \\ 1+2\sqrt{2} & -1 & 2-\sqrt{2} \\ 2-\sqrt{2} & 2+\sqrt{2} & 2 \end{vmatrix} \quad \text{en ajoutant la colonne 2 à la colonne 1,} \\
&= \frac{1}{4^3}\begin{vmatrix} -2\sqrt{2} & 1-2\sqrt{2} & 2+\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & -1 & 2-\sqrt{2} \\ 4 & 2+\sqrt{2} & 2 \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{4^3}\begin{vmatrix} -2\sqrt{2} & 1-2\sqrt{2} & 2+\sqrt{2} \\ 0 & -2\sqrt{2} & 4 \\ 0 & 2\sqrt{2}-2 & 4+2\sqrt{2} \end{vmatrix} \\
&= -\frac{1}{4^2\sqrt{2}}\begin{vmatrix} -2\sqrt{2} & 4 \\ 2\sqrt{2}-2 & 4+2\sqrt{2} \end{vmatrix} \\
&= -\frac{1}{4\sqrt{2}}\begin{vmatrix} -\sqrt{2} & 2 \\ \sqrt{2}-1 & 2+\sqrt{2} \end{vmatrix} = 1
\end{aligned}$$

Donc f est une rotation axiale d'axe Ker $(f - \mathrm{Id}_E)$. Soit u de coordonnées $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}$. Alors $u \in$ Ker $(f - \mathrm{Id}_E)$ si et seulement si $(4A - 4I_3)X = 0$ ce qui est équivalent au système :

$$\left\{\begin{array}{cccl} -5x & +(1-2\sqrt{2})y & +(2+\sqrt{2})z & = 0 \\ (1+2\sqrt{2})x & -5y & +(2-\sqrt{2})z & = 0 \\ (2-\sqrt{2})x & +(2+\sqrt{2})y & -2z & = 0 \end{array}\right.$$

Notant L_1, L_2, L_3 les lignes du système, on constate que L_1+L_2 est proportionnelle à L_3. Donc le système précédent est équivalent à :

$$\left\{\begin{array}{cccl} (1+2\sqrt{2})x & -5y & +(2-\sqrt{2})z & = 0 \\ (2-\sqrt{2})x & +(2+\sqrt{2})y & -2z & = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{cccl} (1+2\sqrt{2})x & -5y & +(2-\sqrt{2})z & = 0 \\ \left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)x & +\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)y & -z & = 0 \end{array}\right.$$

En ajoutant $(2-\sqrt{2})L_2$ à L_1, le système est équivalent à :

$$\left\{\begin{array}{cccc} x & -y & & =0 \\ \left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)x & +\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)y & -z & =0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{cccc} x & -y & & =0 \\ 2x & & -z & =0 \end{array}\right.$$

On en déduit que $\text{Ker }(f-\text{Id}_E)=\mathbb{R}u$ où $u=e_1+e_2+2e_3$ et on oriente la droite vectorielle $\mathbb{R}u$ par le vecteur u.
Cherchons maintenant l'angle θ de la rotation axiale f d'axe $\mathbb{R}u$ orienté par u.

$$\text{tr }(f)=1+2\cos\theta=\text{tr }(A)=0$$

Donc $\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$. Pour déterminer θ, il nous reste à déterminer le signe de $\sin\theta$.
Le vecteur $v=e_1$ n'est pas colinéaire à u. Donc :

$$[e_1,f(e_1),u]=\begin{vmatrix} 1 & -1/4 & 1 \\ 0 & 1/4(1+2\sqrt{2}) & 1 \\ 0 & 1/4(2-\sqrt{2}) & 2 \end{vmatrix}=\frac{1}{4}\begin{vmatrix} 1+2\sqrt{2} & 1 \\ 2-\sqrt{2} & 2 \end{vmatrix}=\frac{5}{4}\sqrt{2}>0$$

Donc $\sin\theta>0$. On en déduit que f est la rotation axiale d'axe $\mathbb{R}u$ orienté par u et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$.

2. $B=\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 1-2\sqrt{2} & -2-\sqrt{2} \\ 1+2\sqrt{2} & -1 & -2+\sqrt{2} \\ 2-\sqrt{2} & 2+\sqrt{2} & -2 \end{pmatrix}$. Cette matrice est la matrice A dont on a multiplié la dernière colonne par -1. B est donc orthogonale. Elle n'est pas symétrique donc f n'est ni une réflexion, ni un demi-tour ou retournement. Donc f est soit une rotation axiale (d'angle $\theta\neq\pi \pmod{2\pi}$ puisque ce n'est pas un demi-tour), soit une antirotation.
Puisque B a été obtenue en multipliant la dernière colonne de A par -1, on a $\det(B)=-1$. Donc f est une antirotation d'axe $\text{Ker }(f+\text{Id}_E)$. Soit u de coordonnées $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}$. Alors $u\in\text{Ker }(f+\text{Id}_E)$ si et seulement si $(4A+4I_3)X=0$ ce qui est équivalent au système :

$$\left\{\begin{array}{cccc} 3x & +(1-2\sqrt{2})y & -(2+\sqrt{2})z & =0 \\ (1+2\sqrt{2})x & +3y & +(-2+\sqrt{2})z & =0 \\ (2-\sqrt{2})x & +(2+\sqrt{2})y & +2z & =0 \end{array}\right.$$

En additionnant L_2+2L_3 à L_1, on obtient après simplification :

$$\left\{\begin{array}{cccc} x & +y & & =0 \\ (1+2\sqrt{2})x & +3y & +(-2+\sqrt{2})z & =0 \\ (2-\sqrt{2})x & +(2+\sqrt{2})y & +2z & =0 \end{array}\right.$$

On constate que $L_2 = 4L_1 - \left(\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}\right) L_3$. Donc le système est équivalent à :

$$\left\{\begin{array}{cccc} x & +y & & = 0 \\ (2-\sqrt{2})x & +(2+\sqrt{2})y & +2z & = 0 \end{array}\right.$$

Et divisant par 2 la dernière ligne, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{cccc} x & +y & & = 0 \\ \left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)x & +\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)y & +z & = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{cccc} x & +y & & = 0 \\ -\sqrt{2}x & & +z & = 0 \end{array}\right.$$

On en déduit que Ker $(f + \mathrm{Id}_E) = \mathbb{R}u$ où $u = e_1 - e_2 + \sqrt{2}e_3$ et on oriente la droite vectorielle $\mathbb{R}u$ par le vecteur u. Donc f est une antirotation d'axe $\mathbb{R}u$ orienté par u, c'est-à-dire :

$$f = s_{(\mathbb{R}u)^\perp} \circ r_{\mathbb{R}u,\theta} = r_{\mathbb{R}u,\theta} \circ s_{(\mathbb{R}u)^\perp}$$

où $s_{(\mathbb{R}u)^\perp}$ est la réflexion par rapport au plan $(\mathbb{R}u)^\perp$ qui a pour équation :

$$x - y + \sqrt{2}z = 0$$

et $r_{\mathbb{R}u,\theta}$ est la rotation axiale d'axe $\mathbb{R}u$ orienté par u et d'angle θ qu'il faut déterminer.

$$\mathrm{tr}\ (f) = -1 + 2\cos\theta = \mathrm{tr}\ (B) = -1$$

Donc $\cos\theta = 0$. Pour déterminer θ, il nous reste à déterminer le signe de $\sin\theta$. Le vecteur $v = e_1$ n'est pas colinéaire à u. Donc :

$$[e_1, f(e_1), u] = \begin{vmatrix} 1 & -1/4 & 1 \\ 0 & 1/4(1+2\sqrt{2}) & -1 \\ 0 & 1/4(2-\sqrt{2}) & \sqrt{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{4}\begin{vmatrix} 1+2\sqrt{2} & -1 \\ 2-\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{vmatrix} = \frac{3}{2} > 0$$

Donc $\theta = \dfrac{\pi}{2}$.

3. $C = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. On vérifie que C est une matrice orthogonale.

   C est symétrique donc f est une symétrie orthogonale par rapport à Ker $(f - \mathrm{Id}_E)$. Plus précisément f est soit un demi-tour (i.e. symétrie orthogonale par rapport à une droite vectorielle), soit une réflexion (i.e. symétrie orthogonale par rapport à un plan vectoriel).

   Pour trancher, cherchons une base ou un système d'équations de Ker $(f - \mathrm{Id}_E)$. Un vecteur u de coordonnées $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}$ est dans Ker $(f - \mathrm{Id}_E)$ si et seulement si $(3C - 3I_3)X = 0$ ce qui équivaut au système à une équation (puisque les 3 équations obtenues sont les mêmes) :

$$x + y + z = 0$$

Ceci est l'équation d'un plan P et f est une réflexion par rapport à P.

4. $D = \dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} -7 & 4 & 4 \\ 4 & -1 & 8 \\ 4 & 8 & -1 \end{pmatrix}$. On vérifie que D est une matrice orthogonale.

   D est symétrique donc f est soit un demi-tour (i.e. symétrie orthogonale par rapport à une droite vectorielle), soit une réflexion (i.e. symétrie orthogonale par rapport à un plan vectoriel). Déterminons Ker $(f - \mathrm{Id}_E)$. Un vecteur u de coordonnées $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}$ est dans Ker $(f - \mathrm{Id}_E)$ si et seulement si $(9D - 9I_3)X = 0$ ce qui équivaut au système d'équations après simplifications :

$$\left\{\begin{array}{rrrl} -4x & +y & +z & = 0 \\ 2x & -5y & +4z & = 0 \\ 2x & +4y & -5z & = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrl} -4x & +y & +z & = 0 \\ -18x & & +9z & = 0 \\ 18x & & -9z & = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrl} -4x & +y & +z & = 0 \\ -2x & & +z & = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrl} -2x & +y & & = 0 \\ -2x & & +z & = 0 \end{array}\right.$$

   Donc $X = x\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, Ker $(f - \mathrm{Id}_E)$ est de dimension 1 et a pour base $\{e_1 + 2e_2 + 2e_3\}$.

   Donc f est un demi-tour d'axe $\mathbb{R}(e_1 + 2e_2 + 2e_3)$.

4.6 Angle entre deux vecteurs

4.6.1 Angle orienté en dimension 2

Proposition 4.6.1 *Soit $(u, v) \in E^2$ tel que $\|u\| = \|v\| = 1$. Alors il existe une unique rotation r_θ d'angle $\theta \in \mathbb{R}$ (mod 2π) telle que $v = r_\theta(u)$.*

Preuve : Il s'agit de montrer qu'il existe un unique $f \in \mathcal{SO}(E)$ tel que $f(u) = v$. Posons $e_1 = u$ et considérons l'unique vecteur e_2 tel que $\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$ soit une base orthonormale directe. Soit f tel que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \langle v, e_1\rangle & -\langle v, e_2\rangle \\ \langle v, e_2\rangle & \langle v, e_1\rangle \end{pmatrix}$$

Cette matrice étant orthogonale et de déterminant 1, $f \in \mathcal{SO}(E)$. De plus $f(u) = v$. Donc ceci montre l'existence d'un élément f tel que $f \in \mathcal{SO}(E)$ et $f(u) = v$.

Montrons l'unicité. Soit $g \in \mathcal{SO}(E)$ vérifiant $g(u) = v$. Alors :

$$\langle g(e_1), g(e_2)\rangle = \langle v, g(e_2)\rangle = \langle e_1, e_2\rangle = 0$$

Donc $g(e_2)$ est orthogonal à v. De même $f(e_2)$ est orthogonal à v. Or comme f et g sont des automorphismes orthogonaux on a $\|g(e_2)\| = \|f(e_2)\| = 1$. Comme $\dim(E) = 2$, $\dim\{v\}^{\perp} = 1$ et de ce qui précède on déduit que $g(e_2) = g(e_1)$ ou $g(e_2) = -g(e_1)$. Si $g(e_2) = -g(e_1)$, alors :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} \langle v, e_1\rangle & \langle v, e_2\rangle \\ \langle v, e_2\rangle & -\langle v, e_1\rangle \end{pmatrix}$$

ce qui implique que $\det(g) = -1$ et contredit le fait que $g \in \mathcal{SO}(E)$. Donc $g(e_2) = f(e_2)$ et comme $g(e_1) = f(e_1)$, $f = g$, ce qui prouve l'unicité. □

Définition 4.6.1 *Soient u et v deux vecteurs non nuls de E. On appelle* ***angle orienté*** *de u et v, l'angle $\theta \in \mathbb{R}$ (mod 2π) de l'unique rotation r_θ telle que :*

$$r_\theta\left(\frac{u}{\|u\|}\right) = \frac{v}{\|v\|}$$

On note $\theta = \widehat{(u, v)}$.

Remarque 4.6.1 *Soient u et v deux vecteurs de E alors :*

1. $\langle u, v\rangle = \|u\|\|v\| \cos \widehat{(u, v)}$.
2. $[u, v] = \|u\|\|v\| \sin \widehat{(u, v)}$.

Proposition 4.6.2 (Relation de Chasles) *Soient u, v et w des vecteurs non nuls de E. Alors :*

$$\widehat{(u, v)} + \widehat{(v, w)} = \widehat{(u, w)} \mod 2\pi$$

En particulier, $\widehat{(u, v)} = -\widehat{(v, u)}$.

Proposition 4.6.3 *Soient u et v des vecteurs non nuls de E et λ et μ des réels non nuls. Alors :*

1. $(\widehat{u, v}) = 0(\mod 2\pi)$ *si et seulement si u et v sont positivement liés.*
2. $(\widehat{u, v}) = \pi(\mod 2\pi)$ *si et seulement si u et v sont négativement liés.*
3. $(\widehat{u, v}) = \frac{\pi}{2}(\mod 2\pi)$ *si et seulement si $\{u, v\}$ est une base orthogonale directe.*
4. $(\widehat{u, v}) = -\frac{\pi}{2}(\mod 2\pi)$ *si et seulement si $\{u, v\}$ est une base orthogonale indirecte.*

5. $(\widehat{\lambda u, \mu v}) = \begin{cases} (\widehat{u,v}) & si \quad \lambda\mu > 0 \\ (\widehat{u,v}) + \pi(\mod 2\pi) & si \quad \lambda\mu < 0 \end{cases}$

Proposition 4.6.4 *Soient (u_1, v_1) et (u_2, v_2) deux couples de vecteurs tels que $u_1 \perp u_2$ et $v_1 \perp v_2$. Alors :*

$$(\widehat{u_1, v_1}) = (\widehat{u_2, v_2})(\mod \pi)$$

Plus précisément si $\{u_1, u_2\}$ et $\{v_1, v_2\}$ ont la même orientation alors :

$$(\widehat{u_1, v_1}) = (\widehat{u_2, v_2})(\mod 2\pi)$$

Proposition 4.6.5 *Soient u et v deux vecteurs de E et soit $f \in \mathcal{O}(E)$. Alors :*

1. *Si $f \in \mathcal{SO}(E)$, $(\widehat{f(u), f(v)}) = (\widehat{u,v})$.*
2. *Si $f \in \mathcal{O}^-(E) := \mathcal{O}(E) \setminus \mathcal{SO}(E)$, $(\widehat{f(u), f(v)}) = -(\widehat{u,v})$.*

Définition 4.6.2 *Soient u et v deux vecteurs non nuls de E. L'unique $\theta \in]-\pi, \pi]$ tel que $\theta = (\widehat{u,v}) \mod 2\pi$ s'appelle la **mesure principale** de $(\widehat{u,v})$.*

4.6.2 Angle en dimension quelconque

On suppose que E est de dimension quelconque.

Définition 4.6.3 *On appelle **écart angulaire** ou **angle non orienté** de deux vecteurs u et v de E le réel :*

$$\theta(u,v) = \arccos\left(\frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\|v\|}\right) \in [0, \pi]$$

Remarque 4.6.2 *Soient u et v deux vecteurs de E alors :*

$$\langle u, v\rangle = \|u\|\|v\| \cos(\theta(u,v))$$

Proposition 4.6.6 *Soient u et v deux vecteurs non nuls de E. Alors :*

1. *$\theta(u,v) = \theta(v,u)$.*
2. *$\theta(u,v) = \dfrac{\pi}{2}$ si et seulement si u et v sont orthogonaux.*
3. *$\theta(u,v) = 0$ si et seulement si u et v sont positivement liés.*
4. *$\theta(u,v) = \pi$ si et seulement si u et v sont négativement liés.*
5. $\theta(\lambda u, \lambda v) = \begin{cases} \theta(u,v) & si \quad \lambda\mu > 0 \\ \pi - \theta(u,v) & si \quad \lambda\mu < 0 \end{cases}$

Proposition 4.6.7 *Si E est orienté et de dimension 2, alors pour tous vecteurs non nuls u et v de E on a :*

$$(\widehat{u,v}) = \pm\theta(u,v) \mod 2\pi$$

Plus précisément si α désigne la mesure principale de l'angle orienté $(\widehat{u,v})$ alors :

$$\alpha = \left\{ \begin{array}{lcl} \theta(u,v) & \textit{si} & \{u,v\} \textit{ est une base directe} \\ -\theta(u,v) & \textit{si} & \{u,v\} \textit{ est une base indirecte} \end{array} \right.$$

De plus $\cos\theta(u,v) = \cos\widehat{(u,v)}$.

Proposition 4.6.8 *Si E est orienté et de dimension 3, alors pour tous vecteurs u et v de E on a :*

$$\|u \wedge v\| = \|u\|\|v\|\sin(\theta(u,v))$$